

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 16 giugno 1918.*

F. D' OVIDIO Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *I neri di pirrolo e le melanine.* Nota del Socio  
A. ANGELI.

I risultati delle ricerche di cui ho data notizia nelle precedenti comunicazioni sopra questo argomento, hanno dimostrato le grandi analogie che presentano i neri di pirrolo con le melanine naturali, sia per quanto riguarda il loro modo di formazione, come anche per i loro caratteri e comportamento.

In seguito a ciò io ho stimato opportuno anche di rintracciare, per quanto le attuali occupazioni me lo consentono, se negli studi eseguiti da altri sperimentatori si potesse trovare qualche accenno a derivati pirrolici eventualmente riscontrati nei prodotti dell'organismo in cui già sono formate o dai quali prendono origine tali materie coloranti. Ma a questo proposito devo subito dire che le mie ricerche sono state assai poco fruttuose, e ciò senza dubbio è dovuto al fatto che nessuno aveva finora rimarcata la grandissima tendenza che ha il pirrolo di fornire prodotti neri o bruni per azione degli ossidanti, e perciò tanto meno si era potuto pensare a possibili relazioni fra questi colori e le melanine che si trovano così diffuse negli organismi.

Non sono mancate ricerche dirette a riscontrare nei tessuti i pigmenti incolori da cui le melanine derivano e fra queste mi limiterò a menzionare quelle di Meirowski <sup>(1)</sup>, nonchè quelle di Fuchs <sup>(2)</sup>, il quale, in un caso di

<sup>(1)</sup> Frankfurter Zeitschr. f. Pathol., 2, 488 (1909).

<sup>(2)</sup> Arch. f. Ophthalmol., 77, 352 (1910).

sarcoma della corioidea, ha osservato che il preparato era in parte colorato ed in parte incolore; la porzione incolore, mantenuta a 56°, in presenza di acqua, dopo alcuni giorni divenne completamente nera. Ciò dimostra dunque che vi era contenuto un melanogeno, incolore, che all'aria si è trasformato in melanina.

Per mezzo dell'impregnazione coi sali d'argento, in certe condizioni, anneriscono non solo le cellule che contengono pigmenti melanotici, ma anche cellule fetali della stessa specie, incolore; ciò non si osserva nei casi di albinismo (<sup>1</sup>). Invece nei tegumenti di topi albi, per trattamento con acqua ossigenata e formalina, è possibile riscontrare la presenza di un cromogeno (<sup>2</sup>). È noto d'altra parte che in alcune condizioni anche i sali d'argento possono agire da ossidanti.

Si comprende subito però che queste ricerche, per quanto pregevoli, sono più che altro di indole istologica e che perciò non presentano uno speciale interesse per il caso che mi riguarda.

Più interessante invece si presenta lo studio del melanogeno che si riscontra nell'urina di alcuni ammalati di melanosarcoma degli organi interni e che senza dubbio è dovuto all'abbondante decomposizione delle melanine. All'aria, tale urina assume poco per volta una colorazione nera ed il colore comparisce in modo istantaneo se si aggiunge un ossidante. È noto che anche per iniezione di soluzioni alcaline delle melanine ricavate dai tumori ovvero dalla sepia, comparisce melanogeno nell'urina. Qualche anno addietro, Eppinger (<sup>3</sup>) ha tentato di isolare il melanogeno dall'urina di un ammalato di melanosarcoma. L'ha separato per trattamento con solfato mercurico dopo di avere acidificato con acido solforico diluito; decomposto il precipitato con solfo ammonico ottenne un prodotto che all'aria anneriva.

Presenta alcune reazioni del triptofano ma soprattutto, ed in modo marcatissimo, quelle dei derivati del pirrolo, quali la reazione di Thormählen (colorazione violetta con nitroprussiato sodico e potassa che con acido acetico passa ad un magnifico azzurro); quella con l'acido fenilglicosilico, per riscaldamento fornisce pirrolo ecc. L'autore ha pure tentato di analizzare il prodotto da lui ottenuto, ma i risultati cui è pervenuto non hanno portato a dati conclusivi. Non è improbabile che si tratti di un sale.

A questo riguardo devo far osservare che io non trovo consigliabile il metodo seguito dall'autore per isolare tale sostanza, vale a dire il trattamento con solfato mercurico in soluzione acida. È noto infatti che il pirrolo (ed alcuni suoi derivati) ha grande tendenza a polimerizzarsi e come Dennstedt (<sup>4</sup>) ha dimostrato i sali complessi che il pirrolo fornisce con i sali dei

(<sup>1</sup>) F. Schreiber e P. Schneider, *Münchener med. Wochenschr.*, 55, 1918 (1908).

(<sup>2</sup>) G. P. Mugde, *Journ. of Physiol.*, 38, *Proc. Physiol. Soc.* 27 marzo 1909.

(<sup>3</sup>) *Biochem. Z.*, 28, 181 (1910).

(<sup>4</sup>) *Berliner Berichte*, 27, 478 (1894).



metalli pesanti, derivano tutti dal tripirrolo e non già dal pirrolo da cui si è partiti. D'altra parte dal tripirrolo si può avere pirrolo, ed esso pure presenta la maggior parte delle reazioni caratteristiche di quest'ultima sostanza.

Per quanto riguarda la reazione di Thormählen citata da Eppinger, farò osservare che nei trattati si trova riportata la reazione per il pirrolo di Denigés <sup>(1)</sup>. Secondo quel che consiglia questo autore, 5 c.c. di soluzione acquosa, ovvero debolmente alcoolica, di pirrolo, si trattano con 0.2-0.3 c.c. di nitoprussiato sodico al 5 % ed 1 c.c. di soda; il liquido diventa giallo verdognolo che poi passa al verde; se si riscalda all'ebollizione e si acidifica con acido acetico, il liquido assume colore azzurro.

In vista però del risultato alquanto diverso che ha fornito la reazione di Thormählen nel caso studiato da Eppinger, ho giudicato opportuno sottoporre anche il pirrolo all'identico trattamento. A circa 10-15 c.c. di acqua, prima agitata con una goccia di pirrolo, ho aggiunto un paio di gocce di nitoprussiato e poi eccesso di potassa: comparisce subito una intensa colorazione violetta che con acido acetico passa ad un magnifico azzurro. Come si vede, si tratta delle identiche colorazioni descritte da Eppinger per il caso da lui preso in esame. Non solo, ma anche la soluzione di pirrolo in acido solforico diluito, che come è noto contiene il tripirrolo e che per azione degli ossidanti annerisce, neutralizzata con carbonato sodico e sottoposta al medesimo trattamento, fornisce in modo intensissimo le stesse colorazioni date dal pirrolo. Anche per questa ragione non è da escludersi che il trattamento con acido solforico e solfato mercurico cui Eppinger ha sottoposto il melanogeno, non abbia potuto alterare il prodotto da cui è partito.

Le differenze osservate dal Denigés forse sono dovute al fatto che egli impiega una minore quantità di alcali; in ogni caso è strano che egli prescrivere con tanta esattezza le quantità e le concentrazioni dei reattivi quando, come avviene nella pratica, non si ha nemmeno idea di quanto pirrolo possa essere contenuto nel liquido da esaminare.

La stessa reazione viene presentata anche dall'urina alla quale sia stata aggiunta una traccia di pirrolo. Come è descritto nei trattati, l'indolo, contrariamente a quanto fa lo scatolo, fornisce la stessa reazione del pirrolo. La reazione riesce invece negativa con l'acido  $\alpha$ -carbopirrolico.

Siccome è noto che gli indoli, per ossidazione, non forniscono prodotti colorati in nero, anche per questa ragione risulta molto probabile che il melanogeno studiato da Eppinger sia realmente un derivato del pirrolo.

A questo riguardo sarebbe quindi desiderabile che i cultori di chimica biologica estendessero la ricerca sulla eventuale presenza del pirrolo ovvero di suoi derivati ai tessuti ed ai liquidi che danno origine alla formazione

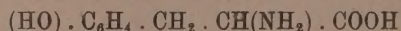
<sup>(1)</sup> Bull. Trav. Soc. Pharm. Bordeaux, dalla Zeitschr. f. anal. Chemie, 49, 317 (1910).

di melanine. Se le reazioni finora proposte servono bene allo scopo, è consigliabile di provare anche l'azione dei mezzi ossidanti ovvero quella dell'acido nitroso, entrambe molto sensibili e caratteristiche (1). Si può impiegare una traccia di nitrito sodico e poi acidificare lievemente con acido acetico, od anche una soluzione alcoolica di nitrito di etile che con tutta facilità si prepara volta per volta. Anche tracce di pirrolo forniscono subito una colorazione giallo-bruna da cui poco dopo si separa un pulviscolo costituito da nero di nitrosopirrolo (2). La ricerca riesce positiva anche quando si opera sull'urina. Anche con bicromato ed acido solforico diluito dall'urina contenente minime quantità di pirrolo, si ha dopo poco tempo una polvere nera costituita in gran parte da un nero di pirrolo (3). Come è noto, gli indoli non presentano queste reazioni. Con bicromato ed acido solforico anche l'acido  $\alpha$ -carbopirrolico, ma in modo assai più lento, dà una polvere nera; invece con acido nitroso si colora in giallognolo.

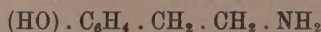
Nella precedente Nota (4) ho pure accennato che il pirrolo, anche per azione delle ossidasi, all'aria, viene ossidato con formazione di prodotti neri. Se per es. si taglia una patata in sottili quadretti che si pongono in una capsula di porcellana e poi si cospargono con acqua emulsionata con poco pirrolo, essi assumono poco per volta una colorazione bruno-chiara che man mano va aumentando di intensità, tanto che al domani hanno l'aspetto di frammenti di carbone. Invece i pezzetti non trattati con pirrolo, a parità di condizioni, rimangono incolori. Il colore che così si forma è insolubile negli alcali, negli acidi e negli ordinari solventi.

L'aggiunta di piccole quantità di acqua ossigenata, che alcune volte favorisce l'azione delle ossidasi, in questo caso ostacola la formazione del pigmento colorato.

A parità di condizioni, l'acido  $\alpha$ -carbopirrolico non fornisce materia colorante. A questo riguardo ricorderò che anche Neuberg (5) ha trovato che un fermento ricavato da un melanosarcoma lascia inalterata la tirosina:



mentre invece intacca la ossifeniletilammina:



che dalla prima differisce per il carbossile in meno.

(1) Anche con i sali di *p*-nitrodiazobenzolo si hanno precipitati cristallini caratteristici dai liquidi che contengono quantità anche minime di pirrolo. Si presta pure bene una soluzione acquosa alcoolica della fenilazossicarbonammide  $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot (\text{N}_2\text{O}) \cdot \text{CO} \cdot \text{NH}_2$ , da me descritta lo scorso anno [Gazz. Chim., 47, I, 213 (1917)] in presenza di una traccia di alcali. Come ognuno comprende, queste reazioni sono comuni anche ad aleni indoli, e sopra questo argomento riferirò in una prossima comunicazione.

(2) Angeli e Cusmano, Gazzetta Chimica, 47, I, 207 (1917).

(3) Angeli, questi Rendiconti, vol. 27, 1° sem., 219 (1918).

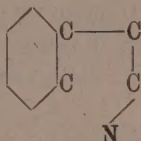
(4) Ibid. ibid.

(5) Biochem. Z., 8, 383 (1909).



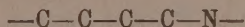
Vi sono fermenti che colorano in nero anche l'adrenalina; Jäger <sup>(1)</sup> ammette anzi che da questa derivino i pigmenti privi di ferro che si trovano negli organismi; anche quello degli ammalati di morbo di Addison sarebbe dovuto, secondo lo stesso autore, all'adrenalina ovvero ad un prodotto da cui questa prende origine, che normalmente in essa si trasforma, ma che in condizioni patologiche viene ossidato con formazione di melanine.

Si vede subito che adrenalina, tirosina ed ossifeniletilammina contengono tutte nella loro molecola la catena:



Come ho accennato nella Nota precedente, gli ossidrili fenici favoriscono l'ossidazione e la demolizione dell'anello aromatico e perciò si comprende come tutte queste sostanze possano dare origine a derivati del pirrolo.

Sarà di grande interesse estendere lo studio dell'azione dei fermenti ossidanti ad altri composti che contengono la catena:



allo scopo di poter stabilire quali fra questi sono in grado di fornire pigmenti colorati.

### Mineralogia. — *Sulle leggi di Curie e di Haüy.* Nota del Socio C. VIOLA.

Queste due leggi sono così intimamente legate fra di loro, che l'una dipende dall'altra, ed entrambe hanno lo stesso contenuto. Io credo che questa circostanza non sia stata sufficientemente chiarita, e che vi è qui una piccola lacuna, che desidero riempire, nella fiducia che ciò faccia piacere ai miei colleghi, e sia di contributo alla scienza. Ne risulterà ancora dimostrata l'importanza che la legge detta di Curie, sull'accrescimento dei cristalli, ha per illuminare e definire la legge di Haüy relativamente agli indici razionali semplici delle facce <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Virchows Arch., 198, 62 (1909).

<sup>(2)</sup> P. Curie, *Sur la formation des cristaux et sur les constantes capillaires de leurs faces*, Bull. de la Société minéralogique de Fr., 1885, VIII, 145; H. Hilton, *Mathematical Crystallography* etc., Oxford, 1903, 105; Idem, *Ueber die Capillarsconstanten der Krystallflächen*, Centralblatt für Min. etc., 1901, 753; P. Gaubert, *Contribution à l'étude de la formation et de l'accroissement des Cristaux*, Bul. de la Société minéral. de Fr., 1902, XXV, 223; G. Wulff, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums*

Immaginiamo senz'altro, come fece Curie, un cristallo tenuto nella soluzione satura, dalla quale si forma. Ivi esso subisce una deformazione continua, diciamo in generale una deformazione capillare, dissolvendosi in certe direzioni e crescendo in altre; e raggiunge l'equilibrio stabile, subito che la tensione superficiale totale fra esso e la soluzione diviene minima. Poniamo il problema nella sua generalità massima: il cristallo in esame sia limitato da  $n$  facce, cioè  $1, 2, 3, \dots, r, \dots, n$ , le aree delle quali siano rispettivamente  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ , le costanti capillari  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , e le distanze normali da un centro  $O$ , preso nel cristallo, siano  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ . Con questi dati possiamo esprimere la tensione superficiale totale del cristallo e il suo volume. La prima è data dalla somma:

$$(1) \quad E = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 + \dots + \alpha_n s_n = \sum_{r=1, \dots, n} \alpha_r s_r.$$

Il secondo è la somma:

$$(2) \quad V = \frac{1}{3} [p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + \dots + p_n s_n] = \frac{1}{3} \sum_{r=1, \dots, n} p_r s_r = \sum_{r=1, \dots, n} v_r,$$

essendo  $v_r = \frac{1}{3} p_r s_r$ ,

Possiamo far variare  $E$  e  $V$  a nostro piacere, ma possiamo eziandio fermarci nell'istante, in cui il cristallo non può nè crescere nè decrescere, nel qual caso la deformazione capillare ha unicamente per fine di far variare la tensione superficiale; per l'equilibrio la variazione di  $E$  è zero.

Il problema dell'equilibrio è allora risoluto con le due condizioni seguenti:

$$I) \quad \delta E = 0 \quad , \quad \delta V = 0;$$

ove è inclusa, come è noto, la legge di Curie.

Lo sviluppo analitico che segue, ha per iscopo di presentare la legge di Curie sotto una forma più comprensiva, di quello che non diano le condizioni I).

Sia  $\delta s_r$  l'accrescimento (positivo o negativo) infinitamente piccolo, che subisce l'area  $s_r$  durante la deformazione del cristallo, e sia  $\delta p_r$  l'accrescimento infinitesimo, che acquista la distanza normale  $p_r$  della faccia  $r$ . Posto ciò, la variazione del volume  $v_r$ , dovuto alla deformazione sulla faccia  $r$ , è

$$\delta v_r = (s_r + \delta s_r) \delta p_r = s_r \delta p_r,$$

negligendo quantità minime di secondo ordine.

*und der Auflösung der Kristallflächen*, Zeit. f. Kryst., 1901, 34, 449; Idem, *Zur Theorie des Krystallhabitus*, Zeit. f. Kryst., 45, 433; C. Viola, *Sulle leggi di Gibb, Curie e Haüy*, R. Accademia dei Lincei, Rendiconti, II, 401.



Facendo indi la variazione di  $v_r$ , con l'applicare le regole solite della differenziazione, si ha

$$\delta v_r = \frac{1}{3} \delta (s_r p_r) = \frac{1}{3} [s_r \delta p_r + p_r \delta s_r].$$

Da queste due espressioni di  $\delta v_r$  risulta

$$(3) \quad \delta v_r = s_r \delta p_r = \frac{1}{2} p_r \delta s_r.$$

Estendendo alle  $n$  facce del cristallo la stessa operazione e sommando, si ottiene la variazione totale del volume del cristallo, cioè:

$$\delta V = \frac{1}{2} \sum_{r=1 \dots n} p_r \delta s_r.$$

Dato indi che la costante capillare  $\alpha_r$  è l'energia necessaria per aumentare l'area  $s_r$  dell'unità, l'aumento di energia per la faccia  $r$  e per la variazione  $\delta s_r$  considerata, sarà  $\alpha_r \delta s_r$ . In conseguenza di ciò le condizioni d'equilibrio si riducono a

$$(4) \quad \sum_{r=1 \dots n} \alpha_r \delta s_r = 0 \quad , \quad \sum_{r=1 \dots n} p_r \delta s_r = 0.$$

Introducendo una costante  $M'$ , che può essere determinata o eliminata, le due condizioni d'equilibrio si riassumono nella seguente:

$$(5) \quad \sum_{r=1 \dots n} (p_r - \alpha_r M') \delta s_r = 0.$$

È facile comprendere che tutte le variazioni  $\delta s_r$  sono fra loro indipendenti, e che perciò tutte possono essere zero ad eccezione di una di esse. Infatti dalla relazione (3) si ha  $\delta s_r = \frac{2s_r}{p_r} \delta p_r$ , e quindi risulta che una variazione qualsiasi  $\delta p_r$  e per conseguenza  $\delta s_r$  non è subordinata ad alcuna variazione di altre distanze normali, trascurando quantità minime di secondo ordine.

Posto ciò, la condizione (5) si divide in tante relazioni quante sono le facce del cristallo,  $n$  nel caso nostro, ossia:

$$II) \quad \frac{p_1}{\alpha_1} = \frac{p_2}{\alpha_2} = \frac{p_3}{\alpha_3} = \dots = \frac{p_r}{\alpha_r} = \dots = \frac{p_n}{\alpha_n} = M'.$$

Questa è l'espressione matematica della legge di Curie. In parole:

*Gli accrescimenti normali delle facce di un cristallo in equilibrio sono proporzionali direttamente alle loro costanti capillari rispettive.*

$M'$  è la costante di proporzionalità, ed è determinata dalla costante capillare di una sola faccia del cristallo.

Conoscendo le costanti capillari delle singole facce di un cristallo, la legge di Curie ci dà il mezzo di determinare le distanze normali delle facce da un centro  $O$  interno, e perciò le loro aree. Essa offre per conseguenza il modo di costruire la figura del cristallo stesso in equilibrio stabile con la fase amorfa, da cui deriva, e giustifica la definizione seguente: *La figura di un cristallo soddisfacente alla legge di Curie è una figura normale.*

Ogni altra figura del cristallo è *anormale*, e dipende da mancanza di equilibrio stabile nell'istante della cristallizzazione, o, come diremo propriamente, da mancanza di reversibilità.

Dalle (2) e II) si ricava

$$(6) \quad V = \frac{1}{3} M' E_m = \frac{1}{3} \frac{p_r}{\alpha_r} E_m,$$

essendo  $E_m$  la tensione superficiale minima del cristallo. La eguaglianza (6) dice precisamente che *il volume del cristallo è, in ogni istante del suo accrescimento, proporzionale alla sua tensione superficiale minima.*

Per ogni figura anormale secondo la legge di Curie, la tensione superficiale  $E$  è maggiore di  $E_m$ ; sicchè per una figura anormale del cristallo si avrà sempre

$$(7) \quad V < \frac{1}{3} M' E;$$

ossia posto un volume  $V$ , che deve assumere il cristallo in una soluzione satura, la deformazione capillare avrà luogo con cessione di energia spontaneamente, e quindi con aumento di temperatura fino a raggiungere l'equilibrio stabile.

\*  
\* \*

Per conseguire il fine che ci proponiamo, si può portare una conveniente trasformazione all'espressione II), sostituendo le densità delle facce in luogo delle costanti capillari nel modo seguente. Per densità intendiamo il numero di atomi, molecole o gruppi di esse contenuti nell'unità di area superficiale; non vi è dubbio che la costante capillare è funzione di questa densità superficiale; si può anzi asserire che la costante capillare è di tanto più grande, quanto è più piccola la densità della rispettiva faccia del cristallo. Poniamo p. es. 4 la densità di una faccia e 12 quella di un'altra; la tensione superficiale sarà di certo più grande nella prima faccia che nella seconda, poichè là le molecole o gruppi di esse devono essere portati



a maggiore distanza che qui dove le molecole sono più numerose nella stessa unità. Quindi se  $d_r$  è la densità di una faccia ed  $\alpha_r$  la sua costante capillare, si potrà senz'altro affermare che  $\alpha_r$  è funzione di  $\frac{1}{d_r}$ , e come prima approssimazione fare

$$(8) \quad \alpha_r = \frac{c}{d_r},$$

rappresentando  $c$  una costante. Siano  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_r, \dots, d_n$  le densità delle rispettive facce 1, 2, 3, ...,  $r$ , ...,  $n$ , e si avrà, in luogo della II), la seguente:

$$\text{III)} \quad p_1 d_1 = p_2 d_2 = p_3 d_3 = \dots = p_r d_r = \dots = p_n d_n = M'',$$

la quale esprime questo principio semplicissimo:

*Il prodotto dell'accrescimento per la densità delle facce di un cristallo in equilibrio stabile è una costante, ossia quanto più è densa una faccia, e tanto più essa è sviluppata.*

Si potrebbe dire che la legge di Curie messa sotto questa forma non conservi più la sua genuina espressione, poichè la relazione (8) propriamente è approssimata, e rappresenta il primo membro di una serie, che potrebbe avere per forma

$$(9) \quad \frac{c}{d_r} + \frac{c'}{d_r^2} + \frac{c''}{d_r^3} + \dots$$

Ma è pur vero che le costanti  $c', c'', \dots$  sono piccolissime, sicchè la somma di questa serie non differisce sensibilmente da  $\alpha_r = \frac{c}{d_r}$ , come risulta dal-

l'esperienza. Chiamando con  $\sigma_r = \frac{1}{d_r}$  l'area specifica della faccia  $r$ , ossia l'area contenente l'unità di atomi o gruppi di essi, e facendo questa sostituzione per tutte le  $n$  facce del cristallo, avremo una quarta forma, sotto la quale si presenta la legge di Curie:

$$\text{IV)} \quad \frac{p_1}{\sigma_1} = \frac{p_2}{\sigma_2} = \frac{p_3}{\sigma_3} = \dots = \frac{p_r}{\sigma_r} = \dots = \frac{p_n}{\sigma_n} = M'';$$

*Ossia gli accrescimenti normali sono proporzionali alle aree specifiche delle rispettive facce del cristallo.*

\*  
\* \*

Si effettua facilmente il passaggio dalla legge di Curie a quella di Haüy mercè di quest'ultime relazioni. Osserviamo senz'altro che, essendo

diversa la costante capillare da faccia a faccia del cristallo, potremo scegliere quattro facce, le cui costanti capillari sono le più piccole.

Siano  $a, b, c, o$  tali facce, assunte in guisa che a tre non formino zona, e ciò allo scopo di rimanere nella massima generalità; le loro aree specifiche siano rispettivamente  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_o$  e i loro accrescimenti normali  $p_a, p_b, p_c, p_o$ . Si osservi inoltre che le aree specifiche  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$  altro non sono che le proiezioni oblique di  $\sigma_o$  rispettivamente sopra le facce  $a, b, c$ , sicchè sarà giustificata la relazione

$$(10) \quad \sigma_o = \sigma_a + \sigma_b + \sigma_c,$$

facendo uso della somma geometrica di vettori per semplificare le operazioni. Lo stesso procedimento è applicabile ad una qualsiasi altra faccia  $r$  del cristallo, la cui area specifica sia  $\sigma_r$  e l'accrescimento normale  $p_r$ . Le proiezioni oblique di  $\sigma_r$  su  $a, b, c$  siano rispettivamente  $\sigma_{ra}, \sigma_{rb}, \sigma_{rc}$ , sicchè, come sopra si è fatto,

$$(11) \quad \sigma_r = \sigma_{ra} + \sigma_{rb} + \sigma_{rc}.$$

Ora per le cose sopradette le aree  $\sigma_{ra}, \sigma_{rb}, \sigma_{rc}$  sono null'altro che multipli delle aree specifiche rispettivamente  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ , di guisa che, posti  $h_r, k_r, l_r$  tre numeri, siano

$$\sigma_{ra} = h_r \sigma_a, \quad \sigma_{rb} = k_r \sigma_b, \quad \sigma_{rc} = l_r \sigma_c;$$

allora in luogo delle (10) si scriverà semplicemente

$$(12) \quad \sigma_r = h_r \sigma_a + k_r \sigma_b + l_r \sigma_c.$$

D'altra parte le proiezioni oblique di  $p_r$  su  $p_a, p_b, p_c$  siano rispettivamente  $p_{ra}, p_{rb}, p_{rc}$ , di guisa che, applicando lo stesso procedimento dei vettori, si possa scrivere

$$(13) \quad p_r = p_{ra} + p_{rb} + p_{rc}.$$

Sostituendo le espressioni (12) e (13) nella forma IV) della legge di Curie si ottiene

$$(14) \quad \frac{p_r}{\sigma_r} = \frac{p_{ra} + p_{rb} + p_{rc}}{h_r \sigma_a + k_r \sigma_b + l_r \sigma_c} = M'',$$

nella quale  $r$  acquista tutti i valori  $1, 2, 3, \dots, r, \dots, n$  quante sono le facce considerate del cristallo in esame.

Si osservi subito che  $p_{ra}, p_{rb}, p_{rc}$  sono variabili fra loro indipendenti, come lo sono fra loro i tre numeri  $h_r, k_r, l_r$ . Da qui risultano le tre relazioni seguenti:

$$V) \quad \begin{cases} p_{1a} : p_{2a} : p_{3a} : \dots : p_{ra} : \dots : p_{na} = h_1 : h_2 : h_3 : \dots : h_r : \dots : h_n, \\ p_{1b} : p_{2b} : p_{3b} : \dots : p_{rb} : \dots : p_{nb} = k_1 : k_2 : k_3 : \dots : k_r : \dots : k_n, \\ p_{1c} : p_{2c} : p_{3c} : \dots : p_{rc} : \dots : p_{nc} = l_1 : l_2 : l_3 : \dots : l_r : \dots : l_n, \end{cases}$$



ove si deve intendere che i tre numeri  $h, k, l$  sono relativamente primi per ciascuna faccia, essendo questa la conseguenza di quanto essi significano.

Con le riduzioni e le trasformazioni si è ottenuto di avere delle relazioni, ove in luogo delle costanti capillari vi sono gli indici delle facce, poichè  $h, k, l$  non sono che indici determinanti la posizione delle facce, e in luogo degli accrescimenti, vi sono i loro componenti secondo tre normali fondamentali. Le relazioni V) dicono semplicemente: *I componenti degli accrescimenti secondo le direzioni di accrescimento minimo, normali rispettivamente a tre facce fondamentali, sono proporzionali direttamente agli indici rispettivi delle facce.*

Questa è la legge che prende il nome di Haüy, conosciuta come *la legge degli indici razionali semplici*.

Il metodo qui impiegato per arrivare alla legge di Haüy ci insegna che questa legge non è punto differente dalla legge di Curie, dalla quale siamo partiti, comunque il suo enunciato la faccia apparire diversa. Quella dice che i componenti degli accrescimenti normali a facce sono proporzionali ai rispettivi indici, ma ammettono una scelta fatta *a priori*, vale a dire si riferiscono a tre facce fondamentali di accrescimento o di costante capillare minima. Questa si fonda sulle aree specifiche, o sulle densità superficiali o sulle costanti capillari, escludendo qualsiasi riferimento. Per conseguenza le due leggi si coprono perfettamente, l'una trae l'altra, il loro contenuto è eguale. La legge di Haüy perderebbe di senso, se il riferimento delle facce e dei loro indici non fosse su facce ad accrescimento minimo, vale a dire su facce dominanti del cristallo; d'onde risulta che le facce di un cristallo si sviluppano di preferenza, a parità di altre condizioni, secondo zone esistenti a indici semplici.

La legge di Haüy fu oggetto di numerosi studi ed ebbe varie interpretazioni; e benchè riposi sull'esperienza, si è creduto nondimeno di fissarne il significato, e di accrescerne il valore con postulati o con leggi tratte da altri fenomeni naturali. Così Goldschmidt ricorse alla legge delle complicazioni, ai principi dell'armonia nelle zone, Fedorow alla struttura zonale e così via. Ora tutto ciò non è necessario, quando si pensi che con la legge di Curie risulta chiarito il senso della legge di Haüy e ne è circoscritto il contenuto.

Un primo e più importante passo in quest'ordine d'idee fece G. Wulff; il mio merito è piccolo, come il lettore può dedurre leggendo questa Nota e le mie precedenti sullo stesso argomento; a me premeva semplicemente di riempire una lacuna, che mi parve esistere nei magistrali lavori di G. Wulff <sup>(1)</sup>.

(<sup>1</sup>) V. Goldschmidt, *Ueber Entwicklung der Krystalloformen*, Zeit. f. Krystall., 1897, 28, pp. 1-35, 414-451; F. de Fedorow, *Beiträge zur zonalen Krystallographie*, Zeit. f. Krystall., 1902. 35, pp. 25-74; C. Viola, *Beiträge zur Symmetrie des Gypses*,

Dacchè risulta dimostrato essere la legge di Haüy identica alla legge di Curie, e l'una come l'altra necessarie e sufficienti per costruire e definire la figura normale di un cristallo, facciamo un altro passo innanzi dicendo, che la legge fondamentale dei cristalli è la legge Haüy-Curie.

Ogni figura non soddisfacente a questa legge è anormale. Le facce vicinali <sup>(1)</sup> o la poliedria delle facce <sup>(2)</sup>, ossia le facce a grande sviluppo e a indici complicati, sono escluse dalla legge di Haüy; esse appartengono a figure anormali, e non possono essere giustificate che con un equilibrio instabile durante la cristallizzazione.

Geometria. — *Enti geometrici coordinati a certi covarianti simultanei estensivi.* Nota della dott.<sup>ssa</sup> ROSARIA GIORDANO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Fra gli enti che, nella interpretazione geometrica dell'annullarsi di certi covarianti simultanei di forme lineari e quadratiche, si presentarono al prof. Del Re, nelle sue lezioni di Analisi estensiva del decorso anno scolastico 1916-17, figurano due interessanti superficie: l'una del 4° ordine, l'altra della 4ª classe rispettivamente <sup>(3)</sup>, risultanti dall'esprimere la condizione perchè simultaneamente si annullino l'invariante bilineare di due rette appartenenti a due congruenze lineari date, e l'invariante di reciprocità rispetto a una quadrica fissa. La forma elegante e sbrigativa con la quale l'analisi estensiva si presta a dare le equazioni delle due superficie, e a studiarne le proprietà principali, mi hanno indotto a trasportare la questione negli spazii ad  $n$  dimensioni, e a presentarla, consigliata e aiutata dallo stesso prof. Del Re (al quale rinnovo qui i sentimenti della mia riconoscenza più viva), in una forma nella quale nuovi enti geometrici vengono a fare comparsa, e nuove prove dell'abilità dell'analisi estensiva vengono a essere offerte.

---

Zeit. f. Krystall. 1902, 35, pp. 220-241; G. Wulff, *Zur Theorie des Krystallhabitus*, Zeit. f. Krystall., 45, 433-472; Idem, *Paralleloëder. Structur und richtige Aufstellung der Krystalle*, Zeitschr. f. Krystall., 47, 607-619.

(<sup>1</sup>) M. Websky, Zeitschr. Deutsch. geol. Gesell., 677; P. Gaubert, *Contribution à l'étude des faces cristallines (faces vicinales)*, 1904, XXVII, 6, Bull. d. l. Soc. Miner. de Fr.; Idem, *Sur les anomalies de forme des cristaux*, 1904, XXVII, 238, ibidem; F. Gonard, *De l'existence de faces vicinales sur l'idocrase d'Ala*, ibidem, 1916, XXXIX, 64-69; C. Viola, op. cit., pag. 407.

(<sup>2</sup>) A. Scacchi, *Sulla poliedria delle facce nei cristalli*, Nuovo Cimento, 1960, XII.

(<sup>3</sup>) Nello studio di queste superficie notevole è la presenza di una reciprocità cubica nulla (nella quale sono corrispondenti) caratterizzata dalla proprietà di avere negli assi delle due congruenze lineari e nelle loro trasversali comuni, il sistema base dei sistemi



In uno spazio ad  $n$  dimensioni  $S_n$  si considerino ordinatamente due spazii  $S_h, R_k$  ad  $h-1, k-1$  dimensioni rispettivamente, e, con essi, due altri spazii analoghi  $S_{h'}, R_{k'}$  ad  $h'-1, k'-1$  dimensioni, e siano i primi rappresentati dai prodotti progressivi:

$$(1) \quad S_h = s_1 s_2 \dots s_h, \quad R_k = r_1 r_2 \dots r_k \quad (h \leq k \text{ supponiamo})$$

e i secondi dai prodotti analoghi:

$$(1') \quad S_{h'} = s'_1 s'_2 \dots s'_{h'}, \quad R_{k'} = r'_1 r'_2 \dots r'_{k'} \quad (h' \leq k' \text{ supponiamo}).$$

dove gli  $s, r$  sono punti distinti, e così pure gli  $s', r'$ , e dove  $h+k, h'+k'$  abbiano valori qualsivoglia in ordine ad  $n+1$ .

Per uno spazio  $X_g$  a  $g-1$  dimensioni, rappresentato dal prodotto progressivo:

$$(2) \quad X_g = x_1 x_2 \dots x_g \quad (g < n+1)$$

dei punti  $x_1, x_2, \dots, x_g$ , passeranno due spazii  $M_\tau, M_{\tau'}$  a  $\tau-1$  e  $\tau'-1$  dimensioni, dati dai prodotti regressivi:

$$(3) \quad M_\tau = s_1 s_2 \dots s_h X_g \cdot r_1 r_2 \dots r_k X_g = \\ = \Sigma (s_1 s_2 \dots s_h X_g r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_p}) r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_{k-p}} X_g$$

$$M_{\tau'} = s'_1 s'_2 \dots s'_{h'} X_g \cdot r'_1 r'_2 \dots r'_{k'} X_g = \\ = \Sigma (s'_1 s'_2 \dots s'_{h'} X_g r'_{i'_1} r'_{i'_2} \dots r'_{i'_{p'}}) r'_{j'_1} r'_{j'_2} \dots r'_{j'_{k'-p'}} X_g$$

con

$$\tau = h + k + 2g - (n+1), \quad \tau' = h' + k' + 2g - (n+1)$$

dove  $i_1 i_2 \dots i_p, j_1 j_2 \dots j_{k-p}$  sono due permutazioni principali complementari degli indici  $1, 2, \dots, k$  di classi  $q, k-q$  rispettivamente, ed  $i'_1 i'_2 \dots i'_{p'}, j'_1 j'_2 \dots j'_{k'-p'}$  due permutazioni analoghe dei numeri  $1, 2, \dots, k'$  di classi  $q', k'-q'$ , posto che sia:

$$(4)_A \quad q = n+1 - (h+g), \quad q' = n+1 - (h'+g)$$

ciò che implica necessariamente:  $h+g < n+1, h'+g < n+1$ .

lineari tripli dei due spazii, fra i quali intercede, e le cui jacobiane si spezzano nelle quattro quadriche che passano per quegli assi presi tre a tre. In un caso particolare essa diventa quella incontrata per la 1<sup>a</sup> volta dal Cremona, quale corrispondenza birazionale reciproca del tipo (cfr. *Opere Matematiche*, vol. II, Mem. 36, pag. 11; e Del Re, *Addizioni alla Nota: Sui sistemi lineari tripli di monoidi d'ordine n* etc., Rend. Acc. Napoli, 1913); ed ha poi pure altri casi particolari, che portano seco particolari notevoli per le superficie.

In allora, assunta, nel modo più generale, una quadrica  $Q$  qualsiasi, della quale sia  $\varphi$  l'omografia indicatrice <sup>(1)</sup>, secondo l'introduzione fattane dal prof. Del Re, se poniamo, per brevità:

$$(5) \quad R_{i_{k-p}} = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_{k-p}} \quad , \quad R_{j_p} = r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_p}$$

$$(5') \quad R_{i_{k'-p'}} = r'_{i_1} r'_{i_2} \dots r'_{i_{k'-p'}} \quad , \quad R_{j'_{p'}} = r'_{j_1} r'_{j_2} \dots r'_{j_{p'}}$$

e osserviamo che:

$$\varphi R_{j_{p'}} = \varphi r'_{j_1} \varphi r'_{j_2} \dots \varphi r'_{j_{p'}} \quad , \quad \varphi X_g = \varphi x_1 \varphi x_2 \dots \varphi x_g$$

avremo l'invariante di reciprocità di  $M_\tau$ ,  $M_{\tau'}$  rispetto alla  $Q$  nella forma:

$$(6) \quad \sum_{i_{k-p}} (S_h X_g R_{i_{k-p}}) R_{j_p} X_g \cdot \sum_{i_{k'-p'}} (S_{h'} X_g R_{i_{k'-p'}}) | \varphi R_{i_{p'}} \cdot | X_g$$

e nella forma equivalente che risulta dal considerare invece del prodotto  $M_\tau | M_{\tau'}$  il prodotto  $M_{\tau'} | M_\tau$ .

Servendoci della forma precedente, e osservando che  $(S_h X_g R_{i_{k-p}})$ ,  $(S_{h'} X_g R_{i_{k'-p'}})$  sono dei numeri, troviamo che gli spazii  $X_g$  soddisfano alla equazione estensiva:

$$(7) \quad \sum \sum (S_h X_g R_{i_{k-p}}) (S_{h'} X_g R_{i_{k'-p'}}) R_{j_p} X_g \cdot | \varphi (R_{i_{p'}} X_g) = 0$$

<sup>(1)</sup> Per ogni quadrica  $Q$  generale o degenerata, esiste in una maniera *unica e ben determinata* un'omografia estensiva generale o degenerata, *simmetrica* (coincidente, cioè, con la propria coniugata) che seguita dall'operazione di *prendere il supplemento di Grassmann*, fornisce il sistema polare, generale o degenerato, rispetto alla quadrica: una tale omografia il prof. Del Re chiama *indicatrice della quadrica* che, a sua volta, chiama *indicatrice dell'omografia estensiva* (e che risponde ad un ente diverso dalle quadriche indicatrici in uso negli spazii a tre dimensioni, per omografie vettoriali), poichè l'una e l'altra s'individuano a vicenda. Se

$$\begin{aligned} \xi' &= (t_1 | \xi) s_1 + (t_2 | \xi) s_2 + \dots + (t_\mu | \xi) s_\mu \\ &= (s_1 | \xi) t_1 + (s_2 | \xi) t_2 + \dots + (s_\mu | \xi) t_\mu \end{aligned}$$

è (cfr. Del Re, *Sopra certe formule fondamentali per la rappresentazione di omografie tra forme estensive*, n. 5. Rend. Acc. Napoli, 1915) un'omografia estensiva simmetrica, sarà:

$$| \xi' = (t_1 | \xi) | s_1 + (t_2 | \xi) | s_2 + \dots + (t_\mu | \xi) | s_\mu$$

ovvero

$$| \xi' = (s_1 | \xi) | t_1 + (s_2 | \xi) | t_2 + \dots + (s_\mu | \xi) | t_\mu .$$

la rappresentazione della polarità corrispondente alla quadrica indicatrice; mentre ne sarà

$$(t_1 | \xi) (s_1 | \xi) + (t_2 | \xi) (s_2 | \xi) + \dots + (t_\mu | \xi) (s_\mu | \xi) = 0$$

l'equazione in termini delle coordinate del punto  $\xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_{n+1} e_{n+1}$ , essendo  $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$  i vertici di una piramide unitaria auto-normale di elementi di riferimento.



che si scinde in  $\binom{n+1}{q-q'}$  ovvero  $\binom{n+1}{q'-q}$  equazioni scalari, secondochè sia:

$$(8) \quad q + g + (n+1) - (q' + g) \leq n+1 \quad \text{cioè} \quad q - q' \leq 0.$$

Se poi è  $q = q'$ , la (7) è un'equazione scalare.

Ogni termine della (7) contiene al quarto grado il prodotto estensivo  $X_g$ , per cui, nel linguaggio dell'analisi ordinaria, al 4° grado, figurano in (7) le coordinate dello spazio a  $g-1$  dimensioni corrispondente. Ne segue che il luogo di questi spazii allorchè l'invariante simultaneo (6) si annulla per gli spazii  $M_\tau, M_{\tau'}$  è l'intersezione di  $\binom{n+1}{q-q'}$  ovvero  $\binom{n+1}{q'-q}$  spazii biquadratici, ovvero è uno stesso di queglii spazii se  $q = q'$ . Nel caso della superficie del 4° ordine di cui sopra, che si forma proprio per  $q = q'$ , è interessante dedurre la forma esplicita della equazione di essa, direttamente dalla (7). Bisognerà supporre  $h = k = h' = k' = 2, g = 1, n = 3$ , e che sia  $\varphi$  la identità, con che si arriva appunto all'equazione:

$$(9) \quad \begin{aligned} & (s_1 r_1 r_2 x) (s'_1 r'_1 r'_2 x) \begin{vmatrix} s_2 & s'_2 & (s_2 | x) \\ x & s'_2 & (x | x) \end{vmatrix} - (s_2 r_1 r_2 x) (s'_1 r'_1 r'_2 x) \begin{vmatrix} s_1 & s'_2 & (s_1 | x) \\ x & s'_2 & (x | x) \end{vmatrix} + \\ & - (s_1 r_1 r_2 x) (s'_1 r'_1 r'_2 x) \begin{vmatrix} s_2 & s'_1 & (s_2 | x) \\ x & s'_1 & (x | x) \end{vmatrix} + (s_2 r_1 r_2 x) (s'_2 r'_1 r'_2 x) \begin{vmatrix} s_1 & s'_1 & (s_1 | x) \\ x & s'_1 & (x | x) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

nella forma stessa ottenuta dal prof. Del Re.

Per dare un altro esempio di applicazione della (7), supponiamo di avere  $h = h' = 1, k = k' = 2, g = 2, n = 3$ ; e che, come nell'esempio precedente, sia  $\varphi$  la identità. Dalla (7) si avrà:

$$(s_1 r_1 r_2 X_2) s_1 X_2 | (s'_1 r'_1 r'_2 X_2) s'_1 X_2 = 0;$$

ovvero:

$$(s_1 r_1 r_2 X_2) (s'_1 r'_1 r'_2 X_2) s_1 X_2 | s'_1 X_2 = 0$$

Se teniamo arbitrari i punti  $r_1, r_2, r'_1, r'_2$  in questa espressione, rimangono arbitrari i fattori  $(s_1 r_1 r_2 X_2), (s'_1 r'_1 r'_2 X_2)$  e l'equazione precedente si riduce effettivamente (scrivendo ora  $s, s'$  in luogo di  $s_1, s'_1$ ) alla seguente:

$$(10) \quad (s | X_2) \cdot (s' | X_2) = 0$$

che rappresenta un complesso di 2° grado luogo delle rette da ciascuna delle quali i punti fissi  $s, s'$  restano proiettati mediante coppie di piani ortogonali in una metrica nella quale l'assoluto sia la quadrica dei supplementi. Esso viene ad essere, in sostanza, il complesso correlativo di quello studiato dall'Hirst nell'articolo: *On the complexes generated by two correlative planes* (cfr. *Collectanea Mathematica in Memoriam Dominici Chelini*, pag. 51), e gode in conseguenza di tutte le proprietà dualistiche di

quelle possedute da questo. Interessante è la forma dell'equazione in analisi ordinaria di un tal complesso, e che si deduce ovviamente dalla (10).

Suppongasi, infatti, che (essendo  $e_1, \dots, e_n$  i vertici della pir. un. ortogonale di rifer.) sia:

$$t = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + t_4 e_4, \quad (t = s, s', x_1, x_2);$$

si avrà da una parte:

$$X_2 = \sum (x_{1i} x_{2k} - x_{1k} x_{2i}) e_i e_k = \sum p_{ik} e_i e_k \quad \text{per } (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

avendo posto, come d'uso,

$$p_{ik} = x_{1i} x_{2k} - x_{1k} x_{2i};$$

e da un'altra:

$$\begin{aligned} t X_2 = & (t_1 p_{23} + t_2 p_{31} + t_3 p_{12}) e_1 e_2 e_3 + (t_1 p_{24} - t_2 p_{14} + t_4 p_{12}) e_1 e_2 e_4 \\ & + (-t_1 p_{34} + t_3 p_{14} + t_4 p_{31}) e_3 e_1 e_4 + (t_2 p_{34} - t_3 p_{24} + t_4 p_{23}) e_2 e_3 e_4 \\ & \text{per } t = s, s'; \end{aligned}$$

sicchè sarà:

$$\begin{aligned} (s_1 X_2 | s'_1 X_2) = & (s_1 p_{23} + s_2 p_{31} + s_3 p_{12}) (s'_1 p_{23} + s'_2 p_{31} + s'_3 p_{12}) \\ & + (s_1 p_{24} - s_2 p_{14} + s_4 p_{12}) (s'_1 p_{24} - s'_2 p_{14} + s'_4 p_{12}) \\ & + (-s_1 p_{34} + s_3 p_{14} + s_4 p_{31}) (-s'_1 p_{34} + s'_3 p_{14} + s'_4 p_{31}) \\ & + (s_2 p_{34} - s_3 p_{24} + s_4 p_{23}) (s'_2 p_{34} - s'_3 p_{24} + s'_4 p_{23}) = 0 \end{aligned}$$

l'equazione in discorso.

Matematica. — *Les équations différentielles linéaires d'ordre infini et l'équation de Fredholm.* Nota di TRAJAN LALESCO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Dans un travail antérieur, nous avons montré que, dans des cas très généraux, la résolution d'une équation intégrale du type de Volterra est équivalente à un problème de Cauchy, relatif à une équation différentielle linéaire d'ordre infini et nous en avons tiré la conclusion que l'introduction dans l'Analyse de ce nouvel instrument analytique établit une liaison de continuité entre les équations différentielles d'ordre fini et les équations aux dérivées partielles. D'où sa grande portée dans cette dernière théorie ainsi que l'étendue variée de ses applications.

Il est intéressant de développer sur l'équation de Fredholm des considérations analogues. On peut y parvenir, à l'aide d'une suite remarquable de noyaux qui s'introduisent naturellement dans les problèmes bilocaux de la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini.



Prenons un intervalle  $ab$  ( $a < b$ ) et définissons à l'intérieur de cet intervalle, la fonction  $G_1(x, y)$  égale à  $\frac{1}{2}$  si  $x > y$  et à  $-\frac{1}{2}$  si  $x < y$ : pour  $x = y$ , posons  $G_1(x, x) = 0$ .

• Considérons l'ensemble des noyaux itérés de  $G_1(x, y)$ , définis par la relation de récurrence

$$G_p(x, y) = \int_a^b G_1(x, s) G_{p-1}(s, y) ds.$$

Ces noyaux jouissent de propriétés générales intéressantes <sup>(1)</sup> et permettent de faire une étude systématique des problèmes bilocaux dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = f(x)$$

et proposons-nous, pour prendre un problème bilocal simple, de déterminer l'intégrale de (1) qui prend, ainsi que ses  $n - 1$  premières dérivées successives, des valeurs égales et de signe contraire, aux points 0 et 1.

En prenant comme fonction inconnue auxiliaire

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \varphi(x)$$

l'équation intégrale du problème s'obtient immédiatement sous la forme:

$$\varphi(x) + \int_0^1 [a_1(x) G_1(x, s) + a_2(x) G_2(x, s) + \dots + a_n(x) G_n(x, s)] \varphi(s) ds = f(x).$$

C'est une équation de Fredholm, mise sous une forme analogue à celle que l'on rencontre lorsqu'on traite le problème de Cauchy à l'aide de l'équation de Volterra.

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient sans peine l'extension que nous avons en vue.

Si les coefficients  $a_n(x)$  restent bornés et  $< M$ , il est facile de voir en effet, que l'expression

$$a_1(x) G_1(x, y) + \dots + a_n(x) G_n(x, y) + \dots$$

représente une série régulièrement convergente dans l'intervalle  $ab$ , car on a, dans cet intervalle:

$$|G_n(x, y)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

<sup>(1)</sup> T. Lalesco, *Sur l'application des équations intégrales aux équations différentielles linéaires* (Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris 6 Mai 1918).

La résolution du problème bilocal considéré, pour une équation différentielle linéaire d'ordre infini, revient donc à la résolution d'une équation de Fredholm, dont le noyau présente, si les coefficients  $a_n(x)$  sont bornés et quelconques, un large caractère de généralité.

Tous les autres problèmes bilocaux de la théorie des équations différentielles linéaires, d'ordre fini ou infini, se réduisent à des équations de Fredholm analogues. Le noyau a la forme générale suivante:

$$a_1(x) [G_1(x, y) + g_0(y)] + \dots + a_n(x) [G_n(x, y) + g_n(y)] + \dots$$

où  $g_n(y)$  désigne un polynôme en  $y$  de degré inférieur à  $n$ .

Matematica. — *Sopra una classe di nuclei semi-definiti positivi*. Nota di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA.

1. Indichiamo con  $\Delta_{(n)}$  l'operatore di Laplace a  $n$  variabili:

$$\Delta_{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

e con  $u(r)$  l'integrale dell'equazione:

$$(1) \quad \Delta_{(n)} u + u = 0$$

funzione della sola distanza  $r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}$  e regolare per  $r = 0$ .

Lo scopo di questa Nota è di dimostrare che l'espressione:

$$\int_S \int_S u(r) \mu(P) \mu(P') dS_P dS_{P'},$$

dove  $r = |PP'|$ ,  $\mu$  è una funzione reale, continua dei punti del campo  $S$  tutto situato al finito, il quale è una porzione di  $S_n$  o di  $F_{n-1}, \dots$ , o di  $F_0$ , è riducibile ad una somma di quadrati ed è quindi  $\geq 0$  qualunque sia la funzione  $\mu$ .

2. Notiamo perciò che, se con  $J_n(r)$  indico la funzione di Bessel di ordine  $n$  e di 1<sup>a</sup> specie, l'integrale  $u(r)$  vale:

$$\frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(r).$$

E poichè:

$$J_{\frac{n-2}{2}}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{r^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(r \cos \varphi) \sin^{\frac{n-2}{2}} \varphi d\varphi$$



potremo porre la  $u(r)$ , sopprimendo una costante moltiplicativa, sotto la forma:

$$(2) \quad u(r) = \int_0^\pi \cos(r \cos \varphi) \operatorname{sen}^{n-2} \varphi \, d\varphi.$$

Questa formola si può anzi verificare facilmente, osservando che:

$$\Delta_{(n)} u(r) = u'' + \frac{n-1}{r} u'.$$

dove gli accenti indicano derivazioni rispetto a  $r$ .

Avremo dunque:

$$\Delta_{(n)} u(r) = \int_0^\pi \left[ -\cos(r \cos \varphi) \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^{n-2} \varphi - \frac{n-1}{r} \operatorname{sen}(r \cos \varphi) \cos \varphi \operatorname{sen}^{n-2} \varphi \right] d\varphi.$$

E poichè, con una integrazione per parti, si ha:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(r \cos \varphi) \cos \varphi \operatorname{sen}^{n-2} \varphi \, d\varphi = \frac{r}{n-1} \int_0^\pi \cos(r \cos \varphi) \operatorname{sen}^n \varphi \, d\varphi$$

avremo pure:

$$\Delta_{(n)} u(r) = \int_0^\pi -\cos(r \cos \varphi) [\cos^2 \varphi \operatorname{sen}^{n-2} \varphi + \operatorname{sen}^n \varphi] \, d\varphi = -u(r)$$

c. d. d.

3. Il risultato contenuto nella (2) si può interpretare nel seguente modo. Sia  $d\omega$  l'elemento superficiale della ipersfera unitaria:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

e consideriamo l'integrale  $(n-1)^{plo}$ :

$$\int_\omega \cos[x_1 - x'_1] \alpha_1 + \dots + (x_n - x'_n) \alpha_n \, d\omega,$$

dove le  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  indicano le coordinate omogenee di  $d\omega$ . Introduciamo come coordinate di un punto sopra  $\omega$ , un sistema di coordinate geografiche, l'asse polare delle quali sia parallelo alla retta congiungente i punti  $(x_1 x_2 \dots x_n)$   $(x'_1 x'_2 \dots x'_n)$ . Se  $\alpha$  è la colatitudine e  $u_1, u_2, \dots, u_{n-2}$  le variabili rimanenti, si ha:

$$d\omega = \operatorname{sen} u_2 \operatorname{sen}^2 u_3 \dots \operatorname{sen}^{n-3} u_{n-2} \operatorname{sen}^{n-2} \alpha \, du_1 \, du_2 \dots du_{n-2} \, d\alpha$$

$$(x_1 - x'_1) \alpha_1 + \dots + (x_n - x'_n) \alpha_n = r \cos \alpha$$

dove ho posto, come precedentemente,  $r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}$ .  
Avremo perciò:

$$\int_{\omega} \cos[(x_1 - x'_1) \alpha_1 + \dots + (x_n - x'_n) \alpha_n] d\omega = \\ = C \int_0^{\pi} \cos(r \cos \alpha) \sin^{n-2} \alpha d\alpha,$$

e C è una costante che si calcola facilmente. Si conclude dunque: *l'integrale della (1) funzione della sola r e regolare per r=0 si può porre sotto la forma:*

$$u(r) = \int_{\omega} \cos[(x_1 - x'_1) \alpha_1 + \dots + (x_n - x'_n) \alpha_n] d\omega,$$

dove  $\omega$  è una ipersfera unitaria e  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  sono le coordinate omogenee di  $d\omega$ .

3. Poniamo:

$$V = \int_S \int_S \cos[(x_1 - x'_1) \alpha_1 + \dots + (x_n - x'_n) \alpha_n] \mu(P) \mu(P') dS_P dS_{P'}$$

la S e la  $\mu$  avendo il significato del n. 1. Facendo la posizione:

$$\lambda_P = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n \\ \lambda_{P'} = x'_1 \alpha_1 + \dots + x'_n \alpha_n$$

si ricava subito:

$$(3) \quad V = \int_S \int_S \cos(\lambda_P - \lambda_{P'}) \mu(P) \mu(P') dS_P dS_{P'} = \\ = \left[ \int_S \cos \lambda_P \mu(P) dS_P \right]^2 + \left[ \int_S \sin \lambda_P \mu(P) dS_P \right]^2.$$

Integriamo la V rispetto alle  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  ed estendiamo l'integrazione ad una sfera unitaria  $\omega$ . Avremo:

$$\int_{\omega} V d\omega = \int_S \int_S \mu(P) \mu(P') dS_P dS_{P'} \times \\ \times \int_{\omega} \cos[(x_1 - x'_1) \alpha_1 + \dots + (x_n - x'_n) \alpha_n] d\omega.$$

L'integrale superficiale, per quanto precede, vale  $u(r)$ . Dalla (3) consegue dunque:

$$(4) \quad \int_S \int_S u(r) \mu(P) \mu(P') dS_P dS_{P'} = \\ = \int_{\omega} d\omega \left[ \int_S \cos \lambda_P \mu(P) dS_P \right]^2 + \int_{\omega} d\omega \left[ \int_S \sin \lambda_P \mu(P) dS_P \right]^2$$



formola che dà la richiesta riduzione a forma canonica. Dalla (4) discende poi:

$$(5) \quad \int_S \int_S u(r) \mu(P) \mu(P') dS_P dS_{P'} \geq 0.$$

4. Se nella formola (5) si pone  $n=2$  e  $n=3$  si ha:

$$\begin{aligned} \int_S \int_S Y_0(r) \mu(P) \mu(P') dS_P dS_{P'} &\geq 0 \\ \int_S \int_S \frac{\sin r}{r} \mu(P) \mu(P') dS_P dS_{P'} &\geq 0. \end{aligned}$$

Questa ultima formola fu da me già usata in una ricerca <sup>(1)</sup> di Fisica matematica.

La dimostrazione qui data evita il passaggio al limite ivi usato.

5. Nella formola (5) si ha l'eguaglianza solo se  $V=0$ ; cioè se:

$$(6) \quad \int_S \cos \lambda_P \mu(P) dS_P = \int_S \sin \lambda_P \mu(P) dS_P = 0.$$

Se ora la 1<sup>a</sup> di queste uguaglianze viene integrata, l'integrazione essendo estesa alla sfera unitaria  $\omega$ , si ottiene, procedendo come prima:

$$(7) \quad \int_S u(r) \mu(P) dS_P = 0,$$

dove  $r$  indica ora la distanza del punto  $P$  dal centro di  $\omega$ . E poichè <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> *Sopra le vibrazioni armoniche smorzate di un corpo elastico immerso in un fluido*. Rendiconti R. Acc. Lincei, vol. XXI, serie 5<sup>a</sup>, pag. 756 e pag. 811.

<sup>(2)</sup> Invero se si pone:  $x_i = \xi_i + h_i$  e quindi:

$$\lambda_P = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i,$$

le (6) divengono (poichè le  $h_i$  non dipendono dalle  $\xi_i$ ):

$$\begin{aligned} \cos \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \right) \int_S \cos \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \right) \mu(P) dS_P - \sin \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \right) \int_S \sin \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \right) \mu(P) dS_P &= 0 \\ \sin \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \right) \int_S \cos \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \right) \mu(P) dS_P + \cos \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \right) \int_S \sin \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \right) \mu(P) dS_P &= 0 \end{aligned}$$

dalle quali consegue:

$$\int_S \cos \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \right) \mu(P) dS_P = \int_S \sin \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \right) \mu(P) dS_P = 0.$$

questo centro è qualunque, si deduce che la (7) è valida per ogni punto dello spazio.

Si conclude: nella (5) la uguaglianza è verificata solamente per funzioni  $\mu(P)$  soddisfacenti la (7) <sup>(1)</sup>.

**Matematica.** — *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio.* Nota II di D. MONTESANO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

1. Nello spazio  $S$  data una cubica gobba  $o_3$  e fissate una retta  $o$ , corda della cubica, e  $2k$  rette  $r$  che si appoggino alle linee  $o_3, o$ , a ciascuna in un punto, senza presentare ulteriori particolarità, resta determinato un sistema omaloidico di superficie

$$\pi_{2k+1} \equiv o_3^k o^k r_{(1)} \dots r_{(2k)}.$$

Stabilita una omografia fra questo sistema e quello dei piani dello spazio  $S'$ , nella corrispondenza birazionale  $X_{2k+1}$  che ne risulta fra i punti degli spazi  $S, S'$ , le superficie del secondo spazio, omologhe dei piani del primo, sono superficie

$$x'_{2k+1} \equiv o_3'^k o'^k r'_{(1)} \dots r'_{(2k)}$$

formanti un sistema affatto analogo al precedente.

Nella corrispondenza  $X_{2k+1}$  sono linee fondamentali di 2ª specie omologhe le rette  $o, o'$ .

Tutto ciò risulta dalla Nota I.

Per  $k=1$ , si ottiene una corrispondenza birazionale  $X_3 \equiv \begin{smallmatrix} o_3, o, 2r \\ o_3', o', 2r' \end{smallmatrix}$  assai semplice <sup>(2)</sup>.

Questa corrispondenza  $X_3$  può essere assunta come corrispondenza fondamentale generatrice di ogni altra corrispondenza  $X_{2k+1}$  del tipo in esame, in base al seguente teorema:

<sup>(1)</sup> Non mi è riuscito di dimostrare che le  $\mu(P)$  soddisfacenti a questa equazione sono identicamente nulle.

<sup>(2)</sup> Un caso particolare della corrispondenza  $X_3$  è quello nel quale i due sistemi omaloidici collegati alla corrispondenza sono costituiti ciascuno da superficie di 3º ordine aventi in comune quattro rette in posizione generica (linee fondamentali di 1ª specie) e le due rette (linee fondamentali di 2ª specie) appoggiate alle precedenti.

Cayley con procedimento analitico giunge al risultato che la Jacobiana di un siffatto sistema sia costituita dagli 8 piani che le rette fondamentali di 1ª specie determinano con quelle di 2ª specie (*On the rational transformation between two spaces*. Proc. of the London Math. Soc., vol. III, n. 102, pag. 175).

Invece è noto che la Jacobiana è costituita dalle 4 quadriche che le rette fondamentali di 1ª specie determinano a tre a tre.

Date  $k$  successive corrispondenze  $X_3^{(1)}, \dots, X_3^{(k)}$  delli po indicato che intercedano rispettivamente fra gli spazi  $S, S_1; S_1, S_2; \dots, S_{k-1}, S'$ , per  $k > 1$ , se sempre due corrispondenze successive  $X_3^{(i)}, X_3^{(i+1)}$ , per  $i = 1, \dots, k-1$ , hanno in comune nello spazio  $S^{(k)}$  la cubica gobba fondamentale e la retta fondamentale di 2<sup>a</sup> specie, senza presentare ulteriori particolarità, la corrispondenza prodotto

$$X_3^{(1)} \times X_3^{(2)} \dots \times X_3^{(k)}$$

è una corrispondenza  $X_{2k+1}$  del tipo in esame.

Per dimostrare il teorema basta effettuare il prodotto indicato.

Se la prima e l'ultima corrispondenza data hanno rispettivamente negli spazi  $S, S'$  le cubiche fondamentali  $o, o'$  e le rette fondamentali di 2<sup>a</sup> specie  $o, o'$ , nella corrispondenza prodotto alla congruenza lineare di rette  $Q$  che ha per direttrici le  $o, o_3$ , corrisponde la congruenza lineare di rette  $Q'$  che ha per direttrici le  $o', o'_3$ , e sempre due punteggiate che abbiano per sostegni due raggi omologhi  $r, r'$  delle due congruenze, si corrispondono con proiezione non degenerare, nella quale al punto  $O \equiv ro$  corrisponde il punto  $O' \equiv r'o'$ .

In generale se in due spazi  $S, S'$  sono date due congruenze lineari di curve  $Q, Q'$  riferite fra di loro con corrispondenza biunivoca, e se sempre per ogni coppia di linee omologhe  $r, r'$  delle due congruenze resta determinata una corrispondenza biunivoca  $H_{rr'}$  fra i punti delle due linee, il sistema di tutte queste corrispondenze  $H_{rr'}$  costituisce una corrispondenza birazionale  $X$  fra i punti degli spazi  $S, S'$ .

Ora affinchè una linea direttrice  $o$  della  $Q$  ed una linea direttrice  $o'$  della  $Q'$  risultino linee fondamentali di 2<sup>a</sup> specie omologhe nella corrispondenza  $X$ , è necessario e sufficiente che si verifichino le seguenti condizioni:

1° in ogni corrispondenza  $H_{rr'}$  il punto  $o$  i punti variabili di appoggio della linea  $r$  alla  $o$  debbono avere per omologhi il punto  $o$  i punti variabili di appoggio della linea  $r'$  alla  $o'$ ;

2° un punto generico  $O$  della  $o$  ed un punto generico  $O'$  della  $o'$  debbono appartenere a  $k$  coppie di linee omologhe della congruenza, per  $k > 0$ ;

3° se esistono coppie di linee omologhe  $rr'$  delle due congruenze, per le quali le corrispondenze  $H_{rr'}$  presentino punti singolari, nessuno di questi punti o soltanto un numero finito deve cadere sulle  $o, o'$  rispettivamente.

In tali condizioni può dirsi che ad ogni punto generico della linea  $o$  dello spazio  $S$  (o della linea  $o'$  dello spazio  $S'$ ) corrisponde nell'altro spazio la  $o'$  (o la  $o$ ) contata  $k$  volte e che perciò se le  $o, o'$  sono rispettivamente degli ordini  $v, v'$ , esse risultano multiple rispettivamente di ordine  $kv', kv$



per le superficie dello spazio  $S$ , o dello spazio  $S'$ , omologhe dei piani dell'altro spazio.

Ma a giustificare rigorosamente quest'asserzione occorre il ragionamento che segue:

Un piano generico  $\psi$  dello spazio  $S$  è segato in  $\mu$  punti  $P$  da una curva generica  $r$  della congruenza  $Q$ , se  $\mu$  è l'ordine delle curve della congruenza. Corrispondentemente nello spazio  $S'$  la superficie  $\psi'$  omologa del piano  $\psi$  è segata da una curva generica della congruenza  $Q'$ , fuori delle linee direttrici e dei punti base della congruenza, in  $\mu$  punti  $P'$ .

Ora si fissi uno qualunque dei  $\nu$  punti di sezione della linea  $o$  col piano  $\psi$  — e sia il punto  $O$  — e per un punto generico  $O'$  della linea  $o'$  si considerino le  $k$  curve  $r'$  della congruenza  $Q'$  che escono dal punto  $O'$  e sono omologhe di curve  $r$  della congruenza  $Q$  che passano pel punto  $O$ .

Su ciascuna delle  $k$  linee  $r'$  ora indicate uno dei  $\mu$  punti  $P'$  del caso generale coincide col punto  $O'$ , e però la superficie  $\psi'$  risulta tangente nel punto  $O'$  ai  $k$  piani che la tangente nel punto  $O'$  alla linea  $o'$  determina rispettivamente con le tangenti nello stesso punto alle  $k$  linee  $r'$  ora indicate.

Ripetendo per tutti i  $\nu$  punti  $O$ , sezioni del piano  $\psi$  con la  $o$ , ciò che si è detto per uno di essi, si deduce che la superficie  $\psi'$  ha una linea multipla di ordine  $k\nu$  nella  $o'$ .

Inoltre dal ragionamento fatto segue che ai piani  $\psi$  dello spazio  $S$  che hanno in comune un punto  $O$  della curva  $o$ , corrispondono superficie  $\psi'$  dello spazio  $S'$  che in ogni punto  $O'$  della  $o'$  hanno in comune  $k$  piani tangenti, sicchè nella sezione di due siffatte superficie la linea  $o'$  conta per una linea semplice di ordine  $\nu' \cdot (k\nu)^2 + k\nu$ , mentre in generale nella sezione di due superficie  $\psi'$ , omologhe di due piani generici dello spazio  $S$ , la linea  $o'$  conta per una linea semplice di ordine  $\nu' \cdot (k\nu)^2$ .

Ciò prova che nella corrispondenza  $X$  se ad una retta generica dello spazio  $S$  corrisponde nello spazio  $S'$  una curva di ordine  $n$ , ad una retta dello spazio  $S$  appoggiata alla  $o$  nel punto  $O$ , corrisponde una curva di ordine  $n - k\nu'$ .

Questo fatto può esprimersi dicendo che al punto  $O$  corrisponde nello spazio  $S'$  una linea di ordine  $k\nu'$  infinitamente prossima alla linea  $o'$  su tutte le superficie  $\psi'$  omologhe dei piani della stella  $(O)$ , sicchè ad una retta di tale stella corrisponde, oltre all'anzidetta linea, un'ulteriore curva di ordine  $n - k\nu'$ .

Ed analogamente per lo spazio  $S$ .

Ciò posto, avendo già dimostrata l'esistenza di una corrispondenza birazionale  $X$  dotata di due rette fondamentali di 2<sup>a</sup> specie omologhe multiple di ordine  $k$  per la corrispondenza, essendo  $k$  un numero intero arbitrario, è agevole dedurre ulteriormente l'esistenza di corrispondenze biunivoche spaziali dotate di due linee fondamentali di ordine  $\nu, \nu'$ , multiple rispetti-

vamente per la corrispondenza secondo i numeri  $kv'$ ,  $kv$ , essendo  $v$ ,  $v'$  due numeri interi arbitrari.

Infatti dopo aver riferito gli spazî  $S$ ,  $S'$  con la corrispondenza  $X$ , si riferisca lo spazio  $S_0$  allo spazio  $S$  con una corrispondenza birazionale  $H_{\mu, v}$  e lo spazio  $S'$  allo spazio  $S'_0$  con una corrispondenza birazionale  $H'_{\nu', \mu'}$ , essendo le  $H$ ,  $H'$  due corrispondenze arbitrarie che non presentino alcuna particolarità rispetto alla  $X$  <sup>(1)</sup>.

Con ciò resterà determinata una corrispondenza birazionale

$$Y = H \times X \times H'$$

fra gli spazî  $S_0$ ,  $S'_0$ , nella quale risulteranno omologhe la congruenza lineare  $Q_v$  dello spazio  $S_0$ , omologa nella  $H$  della congruenza lineare di rette  $Q \equiv |o, o_s|$  dello spazio  $S$ , e la congruenza lineare  $Q_{v'}$  dello spazio  $S'_0$ , omologa nella  $H'$  della congruenza lineare di rette  $Q' \equiv |o', o'_s|$  dello spazio  $S'$ .

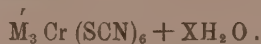
E dalle particolarità che si verificano nella  $X$  per le varie coppie di rette omologhe delle  $Q$ ,  $Q'$ , si deducono le particolarità che si verificano nella  $Y$  per le varie coppie di curve omologhe delle  $Q_v$ ,  $Q_{v'}$ , e si riconosce che si verificano tutte le condizioni che occorrono per potere concludere che la direttrice  $o_v$  della congruenza  $Q_v$ , omologa nella  $H$  della retta  $o$ , e la direttrice  $o'_{v'}$  della  $Q_{v'}$ , omologa nella  $H'$  della retta  $o'$ , sono linee fondamentali di 2<sup>a</sup> specie omologhe nella  $Y$ , multiple rispettivamente degli ordini  $kv'$ ,  $kv$ .

*Dunque esistono sempre trasformazioni birazionali dello spazio, nelle quali si presentano linee fondamentali di 2<sup>a</sup> specie omologhe, degli ordini  $v$ ,  $v'$ , multiple rispettivamente per la trasformazione secondo i numeri  $kv'$ ,  $kv$ , essendo  $v$ ,  $v'$ ,  $k$  tre numeri interi arbitrari.*

<sup>(1)</sup> Volendo fare uso di corrispondenze di tipo noto si potranno assumere due corrispondenze bimonoidiche  $H_{v, v}$ ,  $H'_{v', v'}$  (De Paolis, *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie di ordine  $n$  con un punto  $n-1$ -plo*. Giornale di Matematiche, vol. 13).

Chimica. — *Acido cromisolfocianico e cromisolfocianati.*  
Nota di GINO SCAGLIARINI <sup>(1)</sup>, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

J. Roesler <sup>(2)</sup> trattando l'allume di cromo coi solfocianati alcalini ottenne dei sali della formula generale:



Analogamente potè preparare i cromisolfocianati di bario, piombo, argento. Dal sale di argento lo stesso autore con idrogeno solforato volle liberare l'acido cromisolfocianico. Ma la soluzione di colore rosso-vinoso, nella quale presumibilmente è contenuto l'acido, evaporata a bagno maria svolge acido cianidrico e lascia depositare solfocianato di cromo. Il Roesler non potè ottenere altri cromisolfocianati in causa della loro grande solubilità. In seguito Cioci <sup>(3)</sup>, Rosenheim e Cohn <sup>(4)</sup> si occuparono di tale argomento specialmente per decidere della quantità di acqua di cristallizzazione contenuta nei sali alcalini.

Mi parve però interessante riprendere tale studio per rendere più completa la serie dei cromisolfocianati, e per ottenere l'acido cromisolfocianico.

Per avere i sali di metalli bivalenti ricorsi, come già avevo fatto altra volta, alla esametilentetramina che, come è risaputo, si combina facilmente cogli idrati dei sali in soluzione formando dei complessi assai stabili ed insolubili. In tal modo potei ottenere i cromisolfocianati di manganese, cobalto, nickel, magnesio, calcio, zinco, cadmio e stronzio, dei quali analizzai soltanto i primi cinque come quelli che si prestavano meglio essendo i più puri. Questi sali di un bel colore rosso-vinoso sono naturalmente fra loro isomorfi ed hanno la formula generale:..



Vennero ottenuti partendo dal cromisolfocianato di ammonio con un sale solubile del metallo di cui si vuole preparare il cromisolfocianato aggiungendo quindi una soluzione concentrata di esametilentetramina oppure, assai meglio, trattando il cromisolfocianato di bario con la quantità calcolata di solfato del metallo bivalente e trattare poscia il liquido con una soluzione concentrata di esametilentetramina.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

<sup>(2)</sup> Liebigs, *Annalen*, 141. 185.

<sup>(3)</sup> Z. Anorg. Chem., 19, pag. 314.

<sup>(4)</sup> Ibid., 27, pag. 294 (1911).



Per ottenere l'acido corrispondente si approfittò della sua estrema solubilità in solventi organici facilmente volatili come, ad esempio, l'etere solforico e per distillazione di esso si potè avere l'acido libero.

*Cromisolfocianato di manganese ed esametilentetramina* =



Si ottiene, trattando una soluzione concentrata di cromisolfocianato di bario (una molecola) con un'altra pure concentrata di solfato manganoso (tre molecole circa). La soluzione filtrata per separare il liquido dal solfato di bario formatosi per doppio scambio, viene trattata con una soluzione satura a freddo di esametilentetramina (una molecola di base per un atomo di manganese). Si vanno separando così piccoli cristalli di colore rosso-vinoso, che filtrati e lavati con poca acqua, vennero messi ad asciugare fra carta da filtro. Non si poterono ricristallizzare senza alterazione. I risultati analitici sono qua sotto riportati:

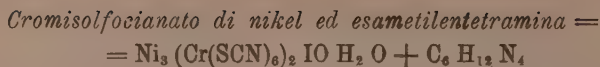
	Calcolato per	Trovato
	$\text{Mn}_3(\text{Cr}(\text{SCN})_6)_2 \cdot 10 \text{H}_2\text{O} + 3 \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	
Mn	10.52	10.20 - 10.32
Cr	6.64	6.35 - 6.40
N	21.50	21.60 - 21.48
S	24.54	23.75
C	22.96	22.58 - 22.70
H	3.60	4.20 - 4.02

*Cromisolfocianato di cobalto ed esametilentetramina* =



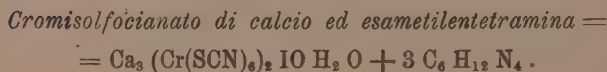
Cristalli ben formati, colorati in rosso a riflessi metallici più colorati di quelli di manganese coi quali al microscopio presentano somiglianza nella struttura cristallina. Si ottiene collo stesso procedimento seguito per il sale di manganese.

	Calcolato per	Trovato
	$\text{Co}_3(\text{Cr}(\text{SCN})_6)_2 \cdot 10 \text{H}_2\text{O} + 3 \text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$	
Co	11.21	10.80
Cr	6.59	6.10
M	21.28	21.50
S	25.43	25.00
C	22.80	23.02
H	3.54	4.05



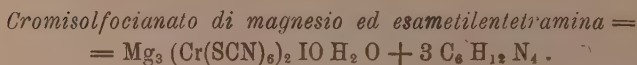
Cristalli ben formati, colorati in rosso a riflessi metallici. Si ottiene alla stessa maniera dei precedenti.

Calcolato per		Trovato
$\text{Ni}_3 (\text{Cr}(\text{SCN})_6)_2 \text{ IO H}_2 \text{ O} + \text{C}_6 \text{ H}_{12} \text{ N}_4$		
Cr	6.59	6.12
N	21.28	21.45
S	25.48	24.90
C	22.80	22.60
H	3.54	4.10



Si ottiene trattando una soluzione abbastanza concentrata di cromisolfocianato di ammonio (2 molecole) con un'altra di cloruro di calcio (3 atomi di metallo) a cui venne in precedenza aggiunta una soluzione di esametilentetramina (3 molecole) di concentrazione tale da impedire la formazione del cloruro di calcio ed esametilentetramina. Piccoli cristalli rossi che, filtrati alla pompa e lavati con poca acqua, vennero seccati fra carta da filtro e sottoposti ad analisi:

Calcolato per		Trovato
$\text{Ca}_3 (\text{Cr}(\text{SCN})_6)_2 \text{ IO H}_2 \text{ O} + 3 \text{ C}_6 \text{ H}_{12} \text{ N}_4$		
Ca	7.90	7.55
Cr	6.79	6.44
S	25.26	25.00
N	22.12	22.10



Si ottiene nello stesso modo di quelli manganese, cobalto ecc. Cristallini rossi.

Calcolato per		Trovato
$\text{Mg}_3 (\text{Cr}(\text{SCN})_6)_2 \text{ IO H}_2 \text{ O} + 3 \text{ C}_6 \text{ H}_{12} \text{ N}_4$		
Mg	4.95	4.62
Cr	7.06	7.28
S	26.07	25.45
N	22.83	22.47



L'acido cromisolfocianico si ottiene assai bene trattando una soluzione concentrata e fredda di cromisolfocianato di ammonio o meglio di bario con un'altra soluzione di acido solforico diluita al 10 % circa nel rapporto di 3 molecole di acido solforico per una di sale di bario. Durante la reazione conviene raffreddare con acqua ghiacciata. Il solfato di bario formatosi venne per filtrazione separato ed il liquido acquoso trattato ripetutamente con etere fino a che l'etere non si colorava più in rosso, ciò che significava che tutto l'acido cromisolfocianico era passato nella soluzione eterea. La soluzione eterea contenente l'acido cromisolfocianico ripetutamente lavata con acqua fino ad eliminazione completa dell'acido solforico e seccata con solfato sodico anidro, venne evaporata a bagno-maria e meglio ancora a pressione ridotta. Si ottenne così un olio di color rosso vivo che neppure a bassa temperatura (miscela eutectica di ghiaccio e sale) solidifica. In esso olio venne determinato il rapporto  $\frac{\text{Cr}}{\text{S}}$  che risultò uguale a  $\frac{1}{6}$  come stanno a dimostrare le analisi qua sotto riportate, e che è appunto il rapporto secondo il quale si trovano cromo e zolfo nell'acido cromisolfocianico.

$\text{Cr}_2 \text{O}_3$  trovato = gr. 0.7310  
S           "       "       "       1.86

$\text{Cr}_2 \text{O}_3$  trovato = gr. 0.6583  
S           "       "       "       1.70

L'acido cromisolfocianico non si decompone affatto ad una temperatura inferiore a 40° circa, ma portato a temperatura superiore incomincia a svolgere acido prussico e vapori di odore agliaceo. È un acido abbastanza energico quasi paragonabile agli acidi minerali. Difatti la sua soluzione normale intacca energicamente molti metalli, come, ad esempio, la limatura di zinco con la quale reagisce anche a freddo con svolgimento di idrogeno. Le sotto-riportate determinazioni di conducibilità eseguite alla temperatura di 25° sulla sua soluzione equivalente a diverse diluizioni danno una idea del grado di dissociazione dell'acido cromisolfocianico:

l'equivalente in	10 litri	89
"	100 " " "	116
"	1000 " " "	124

Questi valori di poco superiori a quelli che si ottengono colle soluzioni equivalenti di acido fosforico ci danno la misura della energia dell'acido cromisolfocianico.



Geologia. — *Influenza morfologica dei movimenti postumi sull'area dell'Italia*. Nota II di G. ROVERETO, presentata dal Corrispondente ARTURO ISSEL.

Uscendo, per continuare in questo argomento, dalla regione ligure, quasi ogni parte della Penisola potrebbe servire di esempio per la trattazione: accenneremo pertanto solo ad alcune condizioni più notevoli, e di diverso carattere.

Dalla pianura veneta si vede la lunga serie di rilievi formanti la parte marginale delle Alpi — le Prealpi Bassanesi e Bellunesi, l'Altipiano del Cansiglio, le Prealpi Carniche e Friulane — profilarsi orizzontali, in grandissimo contrasto con la massa, molto incisa, della zona più interna della catena.

Persistendo in una deplorevole generalizzazione di una osservazione fatta dai geomorfologi americani, forse molti vedrebbero in ciò i resti di uno spianamento subatmosferico, e gli applicherebbero senz'altro la designazione di *penepplain*; ma le cose son passate in un modo ben diverso.

Difatti, gli accurati e recenti studi che hanno illustrato tale regione — del Dal Piaz, del Dainelli, del Fabiani, dello Stefanini — nonchè gli anteriori del Taramelli, sono sufficienti per dimostrare: che qui si sono avuti dei movimenti postumi; che una orogenesi attenuata, comprendente, come più recente termine gli strati pontici, interessò per lo meno due anticlinali e un sinclinale preesistenti, i quali tornarono a inflettersi e si convertirono, secondo la nostra nomenclatura, in *ripieghe*; che una falda di carreggiamento, come abbiám detto in una Nota anteriore, si rimise in movimento; che si produsse un nuovo sinclinale perimetrale a spese dei terreni neogenici. Chiuse l'avvicendamento delle perturbazioni un innalzarsi epeirogenetico, che inclinò, in maniera risentita, gli strati villafranchiani, i quali, come insegnano le sezioni dello Stefanini <sup>(1)</sup>, di già posavano, con marcata trasgressione, sul pontico.

In corrispondenza del sinclinale interno, di ripiegà, si hanno ora dei tronchi di valli longitudinali, quali quelli della Val Sugana a monte dell'Altipiano dei Sette Comuni, della Piave fra Feltre e Belluno; mentre forse a movimenti più antichi, ossia del miocene, sono dovuti i tronchi longitudinali, più interni, dell'Isonzo e del Tagliamento. /

Le sezioni del Dal Piaz <sup>(2)</sup> ci informano, che al sinclinale di ripiegà, dove è più evidente, sono collaterali, verso il cuore delle Alpi Feltrine, dei

<sup>(1)</sup> Mem. Istit. Geol., Università di Padova, vol. III, 1915.

<sup>(2)</sup> Mem. Istit. Geol., Università di Padova, vol. I, 1912.

forti rilievi. resi tali dall'accentuazione di antiche pieghe a ginocchio ben decise, e da anticlinali molto innalzati. la cui area è preponderante su quella dei sinclinali; dalla parte opposta, fra lo stesso sinclinale e la pianura, stanno le Prealpi Bellunesi, corrispondenti a un vero anticlinale di ripieg. che, se molto ampio, dà luogo ad altipiani, ad es. a quello del Cansiglio, mentre nei tratti ristretti produce montagne slanciate.

Il dosso di questo anticlinale è quello che determina, per lungo tratto, la profilazione orizzontale, la quale fa per questo parte di una *superficie strutturale*, e nel contempo rappresenta, rispetto all'erosione, una *superficie fondamentale*, nella quale cominciò a intagliarsi la montagna, con tutte le sue particolarità orografiche; ma che si contorna ancora in modo unito, data la sua età recente. Nel resto delle Alpi, al contrario, l'antica superficie fondamentale si può dire scomparsa — accenna solo ad essa l'altitudine media delle vette di alcuni tratti della catena — perchè non si ebbero, per la accentuazione delle pieghe, estese superficie strutturali, livellate; ma solo degli spianamenti di abrasione marina durante il sollevamento, di erosione sub-atmosferica dopo, che per la loro antichità sono ora distrutti.

Ma nelle Prealpi Bassanesi e Bellunesi abbiamo ancora il problema dei tronchi vallivi che le limitano in senso trasversale. Ora noi, sempre riferendoci alle sezioni del Dal Piaz, possiamo dire, che il tronco trasversale della Piave, susseguente a una lunga deviazione longitudinale, corrisponde a un abbassarsi dell'asse della ripieg. anticlinale; abbassamento originatore di una depressione trasversale, ben riconoscibile per il fatto, che da questa dipende un'interruzione nell'affiorare del giurassico, che è il termine stratigrafico regionalmente più antico. Il tronco trasversale della Brenta è disposto in modo diverso, poichè esso conserva la direzione, ed è in diretta continuazione, della parte di valle fissata nell'ossatura alpina, e per questo antichissima; onde può ritenersi un tronco *antecedente*, che si è mantenuto, senza spostarsi, nella zona di nuovo rilievo, perchè casualmente una piega trasversale si è inflessa dov'era il suo passaggio; se fosse mancata questa eventualità si sarebbe congiunto col solco longitudinale della Piave.

L'analisi dei movimenti postumi vale anche a studiare la morfologia delle pianure, ed è più frequente di quanto non si creda, la corrispondenza morfologica che queste hanno con le loro condizioni tettoniche di profondità; benchè all'esterno appariscano del tutto soggette alle leggi dell'alluvionamento. Ciò deduco soprattutto dai risultati che ho ottenuti studiando la Pampa Argentina <sup>(1)</sup>; ma mi pare che la pianura padana possa altresì confermare tale concetto.

Da notizie date dal Taramelli <sup>(2)</sup> si apprende, che uno dei più tipici *inclusi* della nostra maggior Pianura, la Collina di San Colombano, da me

(1) Bull. Soc. Geol. Ital., vol. XXXIII, 1914.

(2) Rend. R. Istit. Lombardo, 1909.

per la prima volta, abbandonando un vecchio concetto <sup>(1)</sup>, risaliente nientemeno che al secolo XVIII, ritenuta dipendente da un piegamento recentissimo, e non un lembo staccato dall'Appennino per l'azione erosiva di correnti acquee, a seguito delle trivellazioni, è risultato il dorso di un ampio anticlinale, che ha una continuazione sotterranea sin sotto Belgioioso, mentre non arriva sotto Pavia.

Le trivellazioni hanno eziandio distrutto in gran parte la credenza, almeno così ritengo, che la asimmetria della pianura padana, rispetto ai suoi due opposti acquapendenti, sia solo dovuta alle preponderanti alluvioni provenienti dalle Alpi. Invece, tale condizione morfologica dipende anche dall'assetto tettonico di profondità, dal maggiore e più ampio sollevamento epeirogenetico alpino rispetto a quello appenninico; come si può provare con una sezione che congiunga le perforazioni di Monza, di Milano, di Belgioioso, ricavando i rispettivi dati dal Mariani <sup>(2)</sup>, dal Salmoiraghi <sup>(3)</sup> e dal Taramelli già ricordato.

Ora, da questi dati risulta evidente, che le superficie limiti del pliocene marino e del villafranchiano continentale sono inclinate e continuate in modo, da spostare verso l'Appennino la parte mediana del geosinclinale di cui fanno parte; che i depositi villafranchiani hanno riempito la asimmetrica depressione tettonica, e hanno terminato col lasciare al quaternario medio un piano di base corrispondente alla grande disimmetria attuale.

L'Appennino Toscano e Umbro deve alcuni dei suoi più caratteristici tratti morfologici a una orogenesi attenuata che originò grandi conche, in gran parte lacustri, al terminare del pliocene, fece manifestare il vulcanismo dell'Antiappennino, e fu seguito da un movimento epeirogenetico, post-villafranchiano, il quale, accentuando le influenze dei movimenti eustatici, influì sullo sventramento delle conche, sulla nuova profilazione longitudinale dei corsi d'acqua, e massimamente sul congregare le grandi valli del Tevere e dell'Arno, che possono ricordarsi fra gli esempi più curiosi di corsi composti aggiuntivi, con catture, investimenti di deflusso e brevi tratti antecedenti.

Questi concetti furono da me per la prima volta espressi, trattando della morfologia delle valli liguri <sup>(4)</sup>, fra le quali le più orientali — del Taro, della Vara, della Magra — hanno subito, benchè attutito, tale movimento di orogenesi secondaria; ma nessun autore ha creduto sino a ora di doverli accettare, e alcuni hanno anzi a essi contrapposto delle affermazioni erronee, o affatto insufficienti, che per non incorrere nella taccia di irriverente o di polemistà, tralascio di esaminare nei loro particolari. Eppure nei più dei casi è evidente, che la conca è adattata a un sinclinale del

<sup>(1)</sup> Rovereto G., *Studi di Geomorfologia*, pag. 223.

<sup>(2)</sup> Atti Soc. Ital. di Sc. Natur., 1909.

<sup>(3)</sup> Rend. R. Istit. Lomb., vol. XXV, 1892.

<sup>(4)</sup> Rovereto G., *Geomorfologia delle Valli Liguri*, pp. 198, 207 e seg.



periodo orogenetico eocenico, benchè a questo sia di molto posteriore; onde è necessario credere, che un'antica area corrugata, sottoposta a nuove spinte orogeniche, abbia ceduto nelle zone di minor resistenza, che erano appunto quelle sinclinaliche. La forma stessa di conca esclude la presenza di faglie longitudinali, e il dubbio che si è avanzato, se in corrispondenza di esse siansi avuti dei veri laghi, non elimina il fatto del racchiudimento montuoso.

L'Appennino Centrale è forse il più bel caso italiano di *sollevamento epirogenetico*, accentrato secondo un gruppo montuoso, che nella fattispecie è il Gran Sasso. Questo, con gli altri gruppi della regione, della Majella, del Sirente, del Velino, quando cominciò a inflettersi per il movimento orogenetico appenninico, si circoscrisse in una cupola (o in un *carapace* se si ammette che la cupola sia apparente, e rappresenti la modificazione di una falda di ricoprimento), la quale a mano a mano, per i movimenti postumi, sempre più si isolò e si accentuò, ed emerse definitivamente a cominciare dalla fine del miocene, formando così il nucleo orografico dell'Abruzzo.

Dopo questo, è suggestivo considerare, che il miocene al Gran Sasso raggiunge la massima altezza locale, nonchè europea, essendone costituita la vetta di M. Gozzano culminante a m. 2455, e che si ha qui il massimo di un rigonfiamento il quale subito decresce ai lati; perchè alla Majella, secondo cifre del Sacco <sup>(1)</sup>, lo stesso miocene è di già a 1500 m., nel Matese a m. 1200, nel Molise a m. 1000 sul mare.

Se a queste cifre si toglie ciò che è dovuto ai movimenti postpliocenici, che si possono stabilire, tenendo conto del fatto, che al Gran Sasso e alla Majella il pliocene trovasi a 600 m. di altitudine, e se si sottrae eziandio il quantitativo dei movimenti eustatici quaternari, che è di circa 300 m., si ha sempre un enorme rigonfiamento, collegato al miocene, di m. 1500 almeno.

Invece, il rigonfiamento collegato al pliocene ebbe i suoi massimi situati altrove: uno di questi corrisponde al Piceno, dove tal terreno raggiunge ora, secondo il Sacco <sup>(2)</sup>, i 1100 m. di altitudine.

Tutto ciò spiega come cupole, la cui prima accentrazione risale all'eocene, possano tuttora avere un'influenza orografica diretta e marcatissima; per di più pone in chiaro, che quando i movimenti di epirogenesi sono circoscritti, come è il caso di quelli avvenuti sull'area italiana, questi tendono a determinare dei gruppi montuosi divisi da depressioni, e a sostituire quindi, a una catena uniforme e continua, tante parti staccate, non aventi in apparenza legame fra loro. E questa è proprio la condizione della Penisola, dove eziandio si può ritenere, che la stessa classe di movimenti abbia preparato le aree vulcaniche; ma di ciò in una Nota prossima.

(1) Mem. R. Accad. Sc. Torino, vol. LIX, 1907; vol. LX, 1908.

(2) Bull. Soc. Geol. Ital., vol. XXVI, 1907.

Zoologia. — *Stadi larvali di P. Sphyraenoides Risso.*  
Nota di LUIGI SANZO, presentata dal Socio B. GRASSI.

In due mie precedenti Note ho fatto conoscere stadi larvali di *P. hyalina* <sup>(1)</sup> e *P. Rissoi* <sup>(2)</sup> (= *P. Coregonoides* C. V.). Quelli di *P. Sphyraenoides* Risso, di cui vengo ora ad interessarmi, rappresentano il materiale più ricco che io abbia avuto tra le varie specie di *Paralepidini*. Sono più di due mila esemplari, ed in ottime condizioni, essendo stati la maggior parte pescati, con retino a mano, ancora viventi nelle acque di questo Stretto.

Queste larve ripetono, nel loro sviluppo, dei caratteri comuni alle due prime specie: forte allungamento del muso, forte migrazione dell'ano da avanti indietro, e concomitante comparsa di grandi macchie mediane insistenti, le pre-anali, sulla volta peritoneale ed estendentisi più o meno ai lati dell'addome; caratteri che presi insieme s'affermano sempre più nelle nuove specie in esame come la principale caratteristica nello sviluppo larvale dei *Paralepidini*. Ma sulle modalità di questi stessi caratteri si esplicano rilevanti differenze per le quali riesce sicura la distinzione delle varie specie di larve tra loro.

Il dettaglio dello sviluppo post-embrionale di questa specie sarà dato nella già pronta Monografia degli *Scopelini* le cui tavole — una trentina — non possono, per la deficiente mano d'opera cagionata dall'attuale guerra, esser riprodotte. Mi limito pertanto, in questa Nota, a riprodurre alcuni stadi principali della serie, e precisamente stadi di mm. 5.12, mm. 9.68, mm. 15.52, mm. 20.80, mm. 27.20, mm. 34.80.

Tali misure sono rispettivamente ripartite come appresso:

	Larva di mm. 5,12	Larva di mm. 9,68	Larva di mm. 15,52	Larva di mm. 20,80	Larva di mm. 27,20 (fig. 1)	Larva di mm. 34,80
Dall'apice del muso al profilo anteriore dell'occhio . . . . .	0.25	0.40	0.52	0.80	1.00	1.50
Diametro orizzontale dell'occhio . . . . .	0.32	0.40	0.48	0.70	0.70	0.90
Dall'occhio al cingolo toracico . . . . .	0.28	0.38	0.55	1.00	0.90	1.70
Dal cingolo toracico all'apertura anale (inclusa) . . . . .	0.55	0.90	3.00	9.10	12.65	15.10
Dall'apertura anale alla pinna anale . . . . .			7.25	3.75	5.50	7.10
Base della pinna anale (fra le due verticali) . . . . .	3.60	7.34	2.40	9.45	4.10	5.00
Dalla pinna anale all'estremo caudale del bronco . . . . .			0.95	1.00	1.15	1.50
Estensione della pinna caudale (fra le due verticali) . . . . .	0.12	0.26	0.37	1.00	1.20	2.00
Totale . . . mm.	5.12	9.68	15.52	20.80	27.20	34.80

(<sup>1</sup>) L. Sanzo, *Stadi larvali di P. hyalina* C. V. Memoria LIX del R. Comitato Talassografico italiano. 1917.

(<sup>2</sup>) Idem, *Sviluppo larvale di Rissoi* Bp. M. LXII del R. C. T. I. 1917.

*Larva di mm. 5.12.* — È esile, trasparentissima; l'estremo posteriore della corda ancora diritto all'indietro; lievissimo ispessimento mesodermico di origine ai pezzi ipurali. Pinna primordiale alta relativamente all'altezza del tronco. Il muso è cortissimo, fortemente schiacciato dorso-ventralmente, ed alquanto ripiegato in alto. L'occhio è relativamente molto sviluppato; ha forma arrotondata anzichè ovale, quale nelle due specie di larve da me descritte. Piccolissime pettorali, membranose (mm. 0.28 di lunghezza). L'apertura anale assai vicino al capo.

*Larva di mm. 9.68.* — Il muso è divenuto relativamente più lungo da uguagliare il diametro dell'occhio. L'ano s'è spostato alquanto indietro, nel tempo stesso che sono comparse due macchie peritoneali, assai più piccole che in esemplari di uguale lunghezza delle due specie da me esaminate e dove se ne contano, cinque in *P. hyalina* ed una in *P. Rissoi*. All'estremo del tronco, a partire dal lieve ispessimento mesodermico di produzione dei raggi ipurali, vengono, per ciascun lato, in avanti due brevi serie parallele di 5-6 cromatofori ciascuna, che seguono, l'una il profilo superiore, e l'altra quello inferiore della corda dorsale. Consimili serie di cromatofori si trovano in *P. Rissoi*, ma ad uno stadio assai più inoltrato di sviluppo. Nella serie di sviluppo da me descritto esse sono presenti nell'esemplare di mm. 23.74. Una seconda macchia ventralmente a metà del tronco caudale, composta di uno o due grandi cromatofori con ramificazioni che abbracciano, dal basso all'alto, il tronco per poco meno della sua metà d'altezza. Una terza macchiolina, anch'essa ventrale, a metà tra le due macchie anzidette e rispondente alla base della futura pinna anale nella sua porzione anteriore. Tutte e tre le macchie sono di color nero. Una macchiolina di uguale colore all'estremo mandibolare.

Le pettorali ancora piccolissime e membranose. La membrana primordiale persiste integra in tutta la sua estensione dorso ventrale, ma più alta ventralmente che dorsalmente. L'estremo posteriore della corda è lievissimamente ricurvo in alto. Si contano 92 segmenti.

*Larva di mm. 15.52.* — Il muso si presenta ancora molto schiacciato, sebbene in minor grado; esso s'è allungato, ma relativamente assai meno che nelle due specie esaminate. L'ano s'è spostato molto addietro, trovandosi ora a 3 mm. dal cinto toracico, mentre nello stadio precedente di mm. 9.68 ne distava mm. 0.90. Alle due precedenti macchie peritoneali si sono aggiunte successivamente, e decrescenti da avanti indietro, altre quattro macchioline.

Sono apparsi gli abbozzi dei raggi anteriori della pinna anale; se ne contano una dozzina; essi non arrivano al margine della pinna. Lo spazio interposto fra l'ano e l'origine della pinna omonima rappresenta la metà quasi della lunghezza totale del corpo. La pinna primordiale ventrale presenta, poco avanti dell'anale, un lembo di rialzo che diviene più accentuato



con l'ulteriore sviluppo tra la posizione definitiva dell'ano e l'origine dell'anale.

L'estremo della corda non si è ancora ripiegato in alto; sono, però, comparsi dei pezzi ipurali. Dorsalmente la pinna primordiale si è, da avanti indietro, di molto ridotta in altezza fino a scomparire per un certo tratto anteriormente. L'anteriore delle tre macchie si mostra sdoppiata nell'esemplare in esame, ma tale sdoppiamento non è però costante.

*Larva di mm. 20.80.* — Il carattere più saliente di questo stadio, di fronte al precedente, è l'enorme spostamento indietro dell'apertura anale che è divenuta posteriore alla metà della lunghezza totale del corpo. Mentre nello stadio di mm. 15.20 è a 3 mm. dal cingolo toracico, a questo stadio se ne trova discosto per mm. 9.10. Parallelamente con lo spostamento sono andate successivamente comparendo sulla volta peritoneale altre macchie; se ne contano ora 11. La pinna anale, che termina vicinissimo alla caudale, presenta trenta raggi; tale numero si mantiene costante in tutto lo sviluppo ulteriore, ed è il numero definitivo della specie.

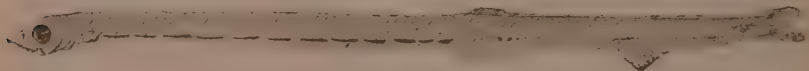


FIG. 1.

L'urostilo è già formato e la pinna caudale presenta i suoi 19 grandi raggi, che è il numero definitivo. È presente a questo stadio l'abbozzo della dorsale a partire dal livello anale indietro. Sono presenti anche delle piccolissime ventrali, impiantate poco avanti dell'apertura anale ed alle quali la dorsale riesce perciò del tutto posteriore. Il muso è divenuto meno schiacciato. Si contano 92-93 segmenti che è il numero definitivo della specie. Sul capo, nello spazio interorbitario, sono apparsi pochi cromatofori in nero. Altri dello stesso colore seguono, in fila, leggermente arcuata, dall'angolo mascellare postero-inferiore, in alto ed in avanti, verso il contorno inferiore orbitario.

*Larva di mm. 27.20 (fig. 1).* — L'ano s'è poco spostato caudalmente. Le macchie peritoneali sono in numero di 13; possono però, in esemplari di uguale lunghezza, trovarsi in numero di 12. Il numero di 12-13 macchie peritoneali si mantiene costante nell'ulteriore sviluppo larvale. Anche in giovani esemplari sugli 8-10 cm., cotali macchie possono rendersi evidenti per trasparenza, diafanizzando in glicerina. In esemplari più sviluppati si estendono tanto crapialmente quanto caudalmente, sino a venire in contatto tra loro; ma la distinzione delle primitive macchie peritoneali m'è riuscita possibile anche in esemplari sui 17 mm. in quanto persiste una linea divisoria carica di pigmento più o meno che le due macchie contigue.

L'anteriore delle tre macchie caudali, posta fra l'apertura anale e la pinna omonima, s'è risolta in una punteggiatura lungo il profilo ventrale del tronco. La dorsale abbozzata mostra nove piccolissimi raggi; compaiono dei cromatofori sul lobo inferiore della caudale, che si mostra alquanto più sviluppato del lobo dorsale. Le pettorali sono tuttavia piccolissime come altresì piccolissime sono le ventrali.

Sulla mascella inferiore si notano pochi denti appuntiti e discretamente lunghi; ancora più piccoli, ma altrettanto scarsi sono quelli della mascella superiore.

*Larva di mm. 34.80.* — La pinna dorsale presenta dieci raggi che è il numero definitivo della specie; avanti ad essa persiste un esile avanzo di pinna primordiale, la quale, a sua volta, si continua ancora con la pinna caudale. L'adiposa comparisce ben presto in stadi successivi ed assai vicino alla pinna caudale. L'anale s'avvicina alla forma che ha nell'adulto. Tra la pinna anale e l'ano, che ha raggiunto la sua posizione definitiva, resta interposto un rilevante tratto di spazio, corrispondente ad un quinto, quasi, della

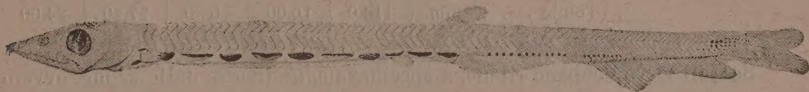


FIG. 2.

lunghezza totale del corpo, occupato dal residuo di pinna primordiale. Questa s'innalza, piuttosto rapidamente dietro l'apertura anale, per degradare caudalmente fino a continuarsi con la pinna anale. Le ventrali sono ancora piccolissime; in stadi molto vicini riescono bene evidenti otto raggi. Le pettorali mostrano ben distinti nove raggi che è il numero della specie.

Colle larve avanti descritte ed il cui sviluppo porta alla *P. Sphyrænooides* si confondono, a prima vista altre larve che, come le prime, hanno la dorsale con dieci raggi retroposta all'anale, e l'anale con trenta raggi. Anche in queste larve compare sulla volta peritoneale un egual numero di macchie come nella serie già vista.

Il computo dei segmenti dà però un risultato minore: 82-84 segmenti anzichè 92-94 che è il numero definitivo di vertebre in *P. Sphyrænooides*. Ed inoltre altri caratteri differenziali costanti lungo la serie che tali larve vengono a costituire, emergono se si mettono a confronto stadi dell'una e dell'altra serie a parità di lunghezza. Queste nuove larve (fig. 2) risaltano dalle prime per avere l'occhio più grosso, il muso più lungo e per trovarsi ad uno stadio più inoltrato di sviluppo. Le differenze vanno però, con lo sviluppo larvale stesso, divenendo meno spiccate.



La seguente tabella, messa a confronto coi valori già dati per le larve di *P. Sphyraenoides*, offre un concetto della differenza nella lunghezza del muso, grandezza dell'occhio e posizione dell'apertura anale nelle due serie:

	Larva di mm. 11.20	Larva di mm. 16	Larva di mm. 20.80	Larva di mm. 27.20 (fig. 2)	Larva di mm. 34
Dall'apice del muso al profilo anteriore dell'occhio . . . . .	0.70	1.05	1.50	2.00	2.40
Diametro orizzontale dell'occhio . . . . .	0.50	0.70	0.90	0.90	1.20
Dall'occhio al cingolo toracico . . . . .	0.50	0.95	1.15	1.60	1.60
Dal cingolo toracico all'apertura anale (inclusa) . . . . .	1.50	5.60	7.55	10.40	13.70
Dall'apertura anale alla pinna anale . . . . .	5.25	3.75	4.00	4.80	6.00
Base della pinna anale (fra le due verticali)	1.75	2.35	3.25	4.30	5.10
Dalla pinna anale all'estremo caudale del tronco . . . . .	0.80	0.85	0.95	1.40	2.00
Estensione della pinna caudale (fra le due verticali) . . . . .	0.20	0.75	1.50	1.80	2.00
Totale . . . . mm.	11.20	16.00	20.80	27.20	34.00

Se tali larve debbano ritenersi specificamente diverse dalle prime, ovvero rappresentino un sesso della stessa specie *P. Sphyraenoides*, sarà discusso nel lavoro monografico.

Dall'Istituto centrale di Biologia marina in Messina.

## ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, l'Accademia procedette alle elezioni di Soci e Corrispondenti. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Fu eletto Socio nazionale:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: CASTELNUOVO GUIDO.

Furono eletti Corrispondenti:

Nella Categoria II, per la *Fisica*: CORBINO ORSO MARIO; per la *Chimica*: BRUNI GIUSEPPE.

Nella Categoria IV, per la *Fisiologia*: BAGLIONI SILVESTRO.

Furono eletti Soci stranieri:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: BOREL ÉMILE, GOURSAT ÉDOUARD; per la *Meccanica*: HADAMARD JACQUES, LAMB HORACE; per



*l'Astronomia*: BAILLAUD BENJAMIN, DYSON F. W.; per la *Geografia matematica e fisica*: LALLEMAND CHARLES.

Nella Categoria II, per la *Fisica*: RUTHERFORD ERNESTO, KAMERLINGH ONNES HEIKE; per la *Chimica*: LE CHATELIER HENRI, RICHARDS THEODORE W., HALLER ALBIN.

Nella Categoria IV, per l'*Agronomia*: LINDET LÉON; per la *Fisiologia*: LANGLEY F. N., FREDERICQ LÉON; per la *Patologia*: ROUX ÉMILE.

L'esito delle votazioni venne proclamato dal Presidente con Circolare del 18 marzo 1918; le nomine dei Soci Stranieri furono approvate con Decreto Luogotenenziale del 4 aprile 1918.

E. M.

---

